

THESE

présentée

DEVANT L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR-INGENIEUR

par

Hans- Joachim ADLER

Diplom-Ingenieur TH Darmstadt

SUJET

Quelques méthodes d'utilisation des ordinateurs
dans l'analyse des grands réseaux électriques

Soutenu le 29 Juin 1972 devant la Commission d'Examen

JURY

MM. A. SARAZIN

Président

E. PILLET

J. C. SABONNADIÈRE

M. TERRENOIRE

} Examineurs

THESE

présentée

DEVANT L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR-INGENIEUR

par

Hans- Joachim ADLER

Diplom-Ingenieur TH Darmstadt

SUJET

Quelques méthodes d'utilisation des ordinateurs
dans l'analyse des grands réseaux électriques

Soutenu le 29 Juin 1972 devant la Commission d'Examen

JURY

MM. A. SARAZIN

Président

E. PILLET

J. C. SABONNADIÈRE

M. TERRENOIRE

} Examineurs



Digitized by the Internet Archive
in 2026



à Barbara,

Nous tenons à exprimer nos profonds remerciements à :

Monsieur le Professeur SARAZIN, Directeur de l'U.E.R. de Physique Nucléaire de l'Université Claude Bernard à Lyon, qui a bien voulu nous faire l'honneur de présider le jury.

Nous exprimons nos plus vifs sentiments de reconnaissance à :

Monsieur le Professeur PILLET qui, par son accueil particulièrement chaleureux, a grandement facilité les débuts de ce travail et de notre séjour en France, et qui a bien voulu honorer le jury de sa présence.

Monsieur SABONNADIÈRE, Maître de Conférences, nous a proposé ce sujet passionnant. Par son aide et ses conseils éclairés, il nous a constamment guidé tout au long de cette étude. Qu'il trouve ici l'expression de notre plus profonde gratitude.

Nous présentons nos respectueux remerciements à :

Monsieur TERRENOIRE, Maître de Conférences, Directeur du Centre de Calcul Interuniversitaire de Lyon-Saint-Etienne, pour avoir accepté de participer à ce jury.

Nous exprimons nos remerciements les plus sincères à :

Monsieur COMPARAT, Directeur de l'Ecole Centrale de Lyon, qui nous a permis de mener à bien ce travail dans ses laboratoires en collaboration avec ceux de l'Institut National Polytechnique de Grenoble.

Nous remercions particulièrement nos camarades Chercheurs et le Personnel des laboratoires d'Electrotechnique et d'Informatique de l'E.C.L. pour l'ambiance favorable qu'ils ont su créer et l'aide permanente que nous avons trouvée auprès d'eux ainsi qu'à Madame CHABERT pour le soin qu'elle a apporté à la réalisation pratique de cette thèse.

UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON

Président : M. Le Professeur J. BOIDIN.

1er Vice-Président : M. R. TOURAINE, Maître de Conférences agrégé.

2ème Vice-Président : M. P. PONCET, Maître-Assistant.

3ème Vice-Président : M. D. SETTELEN, Etudiant.

UNITES D'ENSEIGNEMENT ET DE RECHERCHE

UNITES

DIRECTEURS

U.E.R. médicale Grange-Blanche	M. le Professeur D. GERMAIN
U.E.R. médicale Alexis-Carrel	M. le Professeur C. GIROD
U.E.R. médicale LYON-Nord	M. le Professeur A. BERTOYE
U.E.R. médicale LYON-Sud-Ouest	M. le Professeur L. TOLOT
U.E.R. des Sciences pharmaceutiques	M. M. CARRAS, Maître de conférences agrégé
U.E.R. des Techniques de Réadaptation	M. le Professeur P. MOUNIER-KUHN
U.E.R. de Biologie humaine	M. J.C. CZYBA, Maître de conférences agrégé
U.E.R. d'Education Physique et Sportive	M. A. MILLON, Professeur E.P.S.
U.E.R. des Sciences Odontologiques	M. R. VINCENT
U.E.R. de Mathématiques	M. le Doyen J. BRACONNIER
U.E.R. de Physique	M. le Professeur M. DUFAY
U.E.R. de Chimie et Biochimie	M. le Professeur D. GAUTHERON
U.E.R. des Sciences de la Nature	M. le Professeur L. DAVID
U.E.R. de Biodynamique et Psychopédagogie	M. le Professeur R. FONTANGES
U.E.R. de Physique nucléaire	M. le Professeur A. SARAZIN
U.E.R. de Mécanique	M. le Professeur J. MATHIEU
Observatoire	M. le Professeur J. H. BIGAY
Institut Universitaire de Technologie 1	M. le Professeur B. POUYET
Institut Universitaire de Technologie 2	M. J. GALLET

Secrétaire Général : M. P. IZAUTE.

INTRODUCTION

Les premières applications des calculatrices à l'étude des réseaux électriques datent de 1940. Elles furent limitées à cause de la taille et de la faible capacité mémoire des calculateurs de l'époque.

La première application vraiment conséquente fut faite par l'AEP (American Electric Power Service Corporation) en 1957 sur un ordinateur IBM 704. Les succès obtenus pour les études de répartition de puissance conduisent successivement les utilisateurs à abandonner l'analyseur de réseau (table de calcul) au profit du calcul digital.

Depuis de nombreux programmes sont implantés un peu partout dans le monde pour des calculs de répartition de puissance, mais aussi des calculs de court-circuit et de stabilité transitoire.

Les principaux avantages de l'utilisation des ordinateurs aujourd'hui électroniques sont caractérisés par :

- des moyens plus efficaces et économiques de réaliser les calculs nécessaires à la planification, la conception et l'exploitation des réseaux d'énergie.
- une meilleure utilisation des moyens intellectuels des ingénieurs alors dégagés des problèmes fastidieux de calcul arithmétique.
- la possibilité d'étudier un nombre de cas beaucoup plus grand et donc de prendre des décisions plus sûres, et
- éventuellement, d'envisager des études que le volume de calcul rendait impossible sans l'utilisation de moyens informatiques.

L'adaptation du calcul des réseaux à l'ordinateur n'est pas une simple transposition des méthodes manuelles d'étude. En effet le prix du temps de calcul sur machine nécessite une étude soigneuse des méthodes employées afin de minimiser les temps d'exécution et de rendre automatiques certaines phases de l'étude.

Dans ce but l'utilisation de la théorie des graphes et des divers théorèmes associés à cette théorie et aux lois d'Ohm et de Kirchhoff permet une mise en équation automatique des problèmes par la formation directe des matrices d'admittance et d'impédance nodales. La résolution du problème ainsi formulé fait intervenir l'utilisation de méthodes sans cesse améliorées du point de vue efficacité et encombrement mémoire.

C'est dans ce contexte que se situe notre travail dans lequel nous présentons un certain nombre de méthodes déjà utilisées et pour lesquelles nous proposons des améliorations originales.

La première partie sera consacrée à l'analyse des réseaux et, après avoir traité de la représentation de ces données sur ordinateurs, nous étudierons la méthode des mailles et celle des noeuds pour lesquelles nous avons étudié et mis au point un algorithme performant pour la recherche des arbres dans le graphe associé au réseau.

La deuxième partie traite de l'analyse des défauts permanents dans les **grands** réseaux d'énergie.

Dans le chapitre I nous étudions les méthodes utilisant la matrice d'impédance nodale (Z_{BUS}) et notre contribution sera essentiellement une transformation de l'algorithme original de formation de la matrice d'impédance nodale de manière à y inclure les impédances mutuelles par blocs, ce qui économise du temps de calcul.

Dans le chapitre II qui est le plus important de cette partie, sinon de notre travail, nous avons approfondi la méthode des partitions ("diakoptics") proposé initialement par Gabriel KRON. Nous proposons en outre une méthode de décomposition des réseaux par minimisation des coupures qui permet, dans l'étude des grands réseaux, un gain de temps et de place ainsi que le montrent les résultats obtenus.

Enfin on trouvera en annexe un sommaire des principales méthodes d'étude de répartition de puissance actuellement utilisées.

TABLE DES MATIERES

Introduction

<u>Première Partie</u>	: Analyse des réseaux électriques	1
Chapitre I	: <u>Représentation des réseaux sur ordinateur</u>	1
I - 1	: Eléments de la théorie des graphes et leurs applications aux réseaux électriques	1
I - 2	: Introduction des données	3
I - 3	: Réseaux standard	4
I - 4	: Charges et générateurs	5
I - 5	: Représentation unitaire (variables réduites)	7
Chapitre II	: <u>Méthode des mailles</u>	8
II - 1	: Equations matricielles	8
II - 2	: Traitement des impédances mutuelles	9
II - 3	: Arbre	10
II - 4	: Algorithme de génération de l'arbre	11
II - 5	: Mailles et matrice d'incidence branches-mailles	14
II - 6	: Résultats	16
Chapitre III	: <u>Méthode des noeuds</u>	18
III - 1	: Equations nodales	18
III - 2	: Génération de la matrice d'impédance nodale Z_{BUS}	19
III - 3	: Traitement des impédances mutuelles	20
III - 4	: Inversion d'une matrice symétrique	24
III - 5	: Résultats	26
<u>Deuxième partie</u>	: Analyse des défauts en régime permanent	27
Chapitre I	: <u>Méthodes utilisant la matrice d'impédance nodale</u>	27
I - 1	: Extraction d'un élément	27
I - 2	: Court-circuits	28
I - 3	: Mutuelles	32
I - 4	: Calcul des court-circuits dans un réseau triphasé	33
I - 5	: Résultats	39

Chapitre II	:	<u>Méthode de partition (diakoptics)</u>	40
II - 1	:	Définition du problème	40
II - 2	:	Méthodes de décomposition	44
II - 3	:	Algorithme proposé	46
II - 4	:	Détection des zones non-connexes	52
II - 5	:	Résultats	55
<u>Annexe</u>	:	Répartition de puissance (Load-flow)	57
		1 - Définition du problème	57
		2 - Méthodes de résolution	58
<u>Conclusion</u>			78
<u>Bibliographie</u>			79

Première partie : Analyse des réseaux électriques

Chapitre I : Représentation des réseaux sur ordinateur

I - 1. : Eléments de la théorie des graphes et leurs applications aux réseaux électriques.

Tout réseau électrique est formé par connexion d'éléments actifs et passifs. Pour traiter les problèmes d'analyse des réseaux il faut donc étudier la topologie du réseau donné. C'est pour cela que dans un premier temps on ne s'intéresse qu'aux connexions entre les différents noeuds sans tenir compte des caractéristiques électriques des éléments de connexion.

L'ensemble de noeuds et d'arêtes ainsi obtenu constitue le graphe, correspondant au réseau électrique donné. Lorsque l'on attribue des directions aux arêtes pour désigner le sens arbitraire de circulation des courants dans le réseau on obtient un graphe orienté. Nous allons donc donner ci-dessous quelques définitions des composants d'un graphe dont nous aurons besoin par la suite :

- ordre du graphe : le nombre de ses noeuds.
- graphe complet : deux noeuds quelconques sont reliés dans au moins une direction.
- degré d'un noeud : nombre d'arêtes adjacentes à ce noeud.
- chaîne : séquence d'arêtes ayant une extrémité en communs.
- maille ou cycle : chaîne dont le noeud initial et le noeud terminal coïncident, et qui n'emprunte pas deux fois la même arête.
- composante connexe d'un graphe : ensemble de noeuds relié à un noeud donné par une chaîne.
- nombre cyclomatique : nombre maximum de mailles indépendantes. Pour un graphe contenant n noeuds, e arêtes et p composantes connexes on trouve $c = e - n + p$.
- arbre d'un graphe connexe : sous-graphe connexe sans mailles qui relie tous les noeuds.
- co-arbre : ensemble des arêtes ne faisant pas partie de l'arbre.
- branche : arête d'un arbre ou d'un co-arbre.

Pour le calcul numérique des problèmes d'analyse des réseaux on peut utiliser des matrices qui décrivent la topologie du réseau donné.

On définit :

a) Matrice d'incidence noeud-noeud $A(a_{ij})$, ordre (n, n) telle que :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe un élément qui part du noeud } i \text{ au noeud } j \\ -1 & \text{----- } j \text{ ----- } i \\ 0 & \text{s'il n'y a pas d'élément entre les noeuds } i \text{ et } j \end{cases}$$

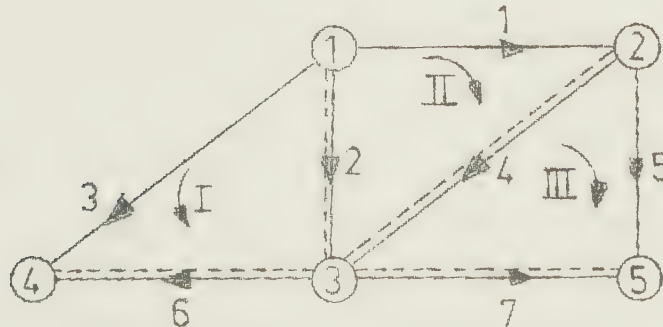
b) Matrice d'incidence arête-noeuds $D(d_{ij})$, ordre (e, n) telle que :

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'élément } i \text{ part du noeud } j \\ -1 & \text{----- arrive au -----} \\ 0 & \text{si l'élément } i \text{ n'est pas connecté au noeud } j \end{cases}$$

c) Matrice d'incidence branches-maïlles $M(m_{ij})$, ordre $(e, e-n+1)$ telle que :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si l'élément } i \text{ fait partie de la maille } j \text{ dans le sens positif} \\ -1 & \text{----- négatif} \\ 0 & \text{si l'élément } i \text{ ne fait pas partie de la maille } j \end{cases}$$

Exemple :



$$A = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & & 1 & 1 & 1 & \\ 2 & -1 & & 1 & & 1 \\ 3 & -1 & -1 & & 1 & 1 \\ 4 & -1 & & -1 & & \\ 5 & & -1 & -1 & & \end{array}$$

	1	2	3	4	5
1	1	-1			
2	1		-1		
3	1			-1	
D = 4		1	-1		
5		1		-1	
6			1	-1	
7			1	-1	

	I	II	III
1		1	
2	-1	-1	
3	1		
M = 4		1	-1
5			1
6	-1		
7			-1

I - 2. : Introduction des données.

En générale, le graphe représentatif d'un réseau électrique est loin d'être un graphe complet; c'est pour cela que les matrices d'incidence $A(a_{ij})$ et $D(d_{ij})$ sont des matrices très creuses.

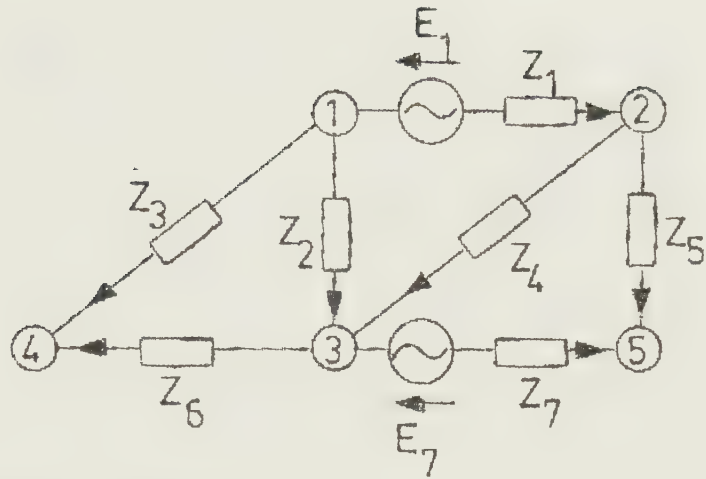
On a donc intérêt à n'introduire dans l'ordinateur que les éléments non-nuls de la matrice d'incidence.

Pour cela on définit une matrice $L(l_{ij})$, dimension $(e, 5)$ appelée aussi "liste d'éléments" telle que :

- l_{i1} : numéro de l'élément i
- l_{i2} : numéro du noeud d'où part l'élément i
- l_{i3} : _____ où arrive _____
- l_{i4} : impédance de l'élément i
- l_{i5} : source de tension (s'il y en a) dans l'élément i

Cette liste permet de rentrer en ordinateur en même temps que la géométrie du réseau étudié les propriétés électrique de chaque élément.

Pour le réseau ci-dessous on obtient :



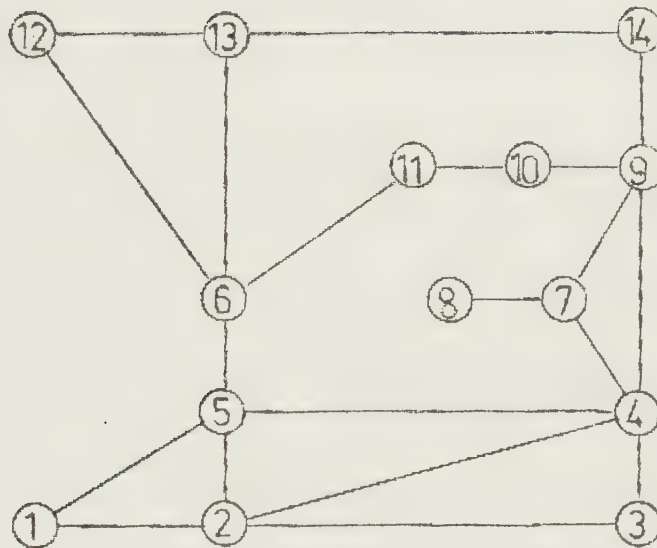
	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5
1	1	1	2	Z_1	E_1
2	2	1	3	Z_2	0
3	3	1	4	Z_3	0
L = 4	4	2	3	Z_4	0
5	5	2	5	Z_5	0
6	6	3	4	Z_6	0
7	7	3	5	Z_7	E_7

I - 3. : Réseaux standard.

Une fois qu'une méthode d'analyse de réseau a été développée, il est nécessaire de la comparer avec d'autres méthodes existantes afin de justifier sa validité quant au temps de calcul et aux résultats.

On choisit donc un certain nombre de réseaux de test dont la géométrie et les caractéristiques électriques varient.

Environ 80% des publications utilisent comme réseaux tests les "IEEE standard systems". Nous avons donc adopté ces systèmes pour tester nos programmes. Ces réseaux standard contiennent respectivement 14, 30, 57 et 118 noeuds. Ils sont décrits en détail dans (18). On se contente ici de donner le graphe correspondant au réseau standard de 14 noeuds et de 20 éléments.



Réseau test à 14 noeuds de IEEE

I - 4. : Charges et générateurs.

Dans les calculs des réseaux les générateurs sont représentés par des sources de courant constantes I_g qui sont déterminées à partir des puissances actives P_g , des facteurs de puissances $\cos \phi_g$ et des tensions nominales V_g :

$$I_g = P_g / \{V_g \cdot \cos \phi_g\}$$

Les charges dont on connaît la puissance active P_1 et réactive Q_1 sont transformées en impédances constantes :

$$P_1 = V_1 \cdot I \cdot \cos \phi_1 \quad (1)$$

$$Q_1 = V_1 \cdot I \cdot \sin \phi_1 \quad (2)$$

d'où

$$\tan \phi_1 = Q_1 / P_1$$

On a :

$$\begin{aligned}
 S_1 &= P_1 + jQ_1 \\
 &= P_1(1 + j \tan \phi_1) \\
 &= P_1(\cos \phi_1 + j \sin \phi_1) / \cos \phi_1 \\
 &= P_1 e^{j\phi_1} / \cos \phi_1
 \end{aligned} \tag{3}$$

Or I^* , Z^* , S^* , V^* étant les conjugués des nombres complexes I , Z , S , V respectivement il vient :

$$S_1 = V_1 I^*$$

et

$$V_1 = Z_1 I$$

d'où

$$V_1^* = Z_1^* I^*$$

ce qui donne

$$S_1 = V_1 V_1^* / Z_1^*$$

On en déduit

$$Z_1^* = |V_1|^2 / S_1$$

et

$$Z_1 = |V_1|^2 / S_1^*$$

$$Z_1 = (|V_1|^2 / |S_1|^2) S_1$$

$$Z_1 = \frac{|V_1|^2}{P_1^2 / \cos^2 \phi_1} \cdot P_1 e^{j\phi_1} / \cos \phi_1 = (|V_1|^2 / P_1) \cos \phi_1 e^{j\phi_1}$$

Les tensions V_1 sont calculées par une étude de répartition de puissance dont on parlera en détail en annexe.

L'expérience a montré que pour le calcul des courants de court-circuit, la représentation des générateurs par des sources de tension (ou de courant) constantes et des charges par des impédances constantes donne des résultats satisfaisants (1, 19).

I - 5. : Représentation unitaire (variables réduites).

La représentation des grandeurs physiques par des variables réduites indimensionnelles permet de nombreuses simplifications dans l'étude des réseaux, ce qui a conduit à généraliser son emploi.

Les grandeurs qui interviennent dans les calculs sont exprimées par rapport à une "base" plutôt qu'en unités physiques.

Les valeurs de base sont choisies telles que les lois fondamentales de l'électrotechnique restent valables dans la représentation unitaire.

En général on choisit une base de tension (V_{base}) et une base de puissance (VA_{base}) puis on en déduit les autres grandeurs de base (38) :

$$I_{base} = VA_{base} / V_{base} = KVA_{base} / KV_{base}$$

$$Z_{base} = (V_{base})^2 / VA_{base} = (KV_{base})^2 / MVA_{base}$$

$$Y_{base} = 1 / Z_{base}$$

Si V , I et Z désignent les tensions en volt, les courants en ampère et les impédances en ohm, on trouve pour les valeurs normalisées $\bar{V}$, $\bar{I}$ et $\bar{Z}$ dans la représentation unitaire :

$$\bar{V} = V / V_{base}$$

$$\bar{I} = I / I_{base}$$

$$\bar{Z} = Z / Z_{base}$$

Chapitre II : Méthode des mailles

II - 1. : Equations matricielles.

Dans la méthode des mailles le réseau réel est décrit par $(e - n + 1)$ mailles indépendantes (e étant le nombre d'arêtes et n le nombre de noeuds dans le réseau original). Après avoir calculé les courants i_m dans les mailles, on obtient les courants i_e dans les arêtes par superposition des courants de maille (21):

$$i_m = Z_{mm}^{-1} \cdot M^t \cdot E \quad (1)$$

$$i_e = M \cdot i_m \quad (2)$$

$$Z_{mm} = M^t \cdot Z_{pr} \cdot M \quad (3)$$

avec

E vecteur des sources de tension (ordre e)

i_m vecteur des courants de maille (ordre $e - n + 1$)

i_e vecteur des courants dans les arêtes (ordre e)

Z_{pr} matrice primitive d'impédance (ordre e, e)

Z_{mm} matrice d'impédance des mailles (ordre $e - n + 1, e - n + 1$)

M matrice d'incidence arêtes - mailles (ordre $e, e - n + 1$)

M^t transposé de M (ordre $e - n + 1, e$)

La matrice primitive d'impédance $Z_{pr} (Z_{ij})$ est définie telle que

Z_{ii} = impédance propre de l'élément i

$-Z_{ij}^+$ = impédance mutuelle entre les éléments i et j

Dans un réseau connexe de e éléments et de n noeuds il y a exactement $(e - n + 1)$ mailles indépendantes formées en fermant chaque branches du co-arbre par des branches de l'arbre.

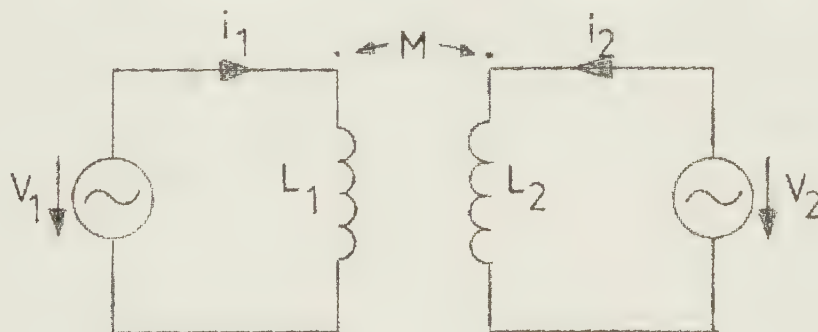
Il faut donc d'abord déterminer un arbre et le co-arbre correspondant dans le réseau donné.

Pour chaque branche du co-arbre il existe un seul ensemble de branches de l'arbre qui peut fermer la maille. C'est cet ensemble qu'il faut trouver ensuite, ainsi que la direction de chaque branche relativement à la direction définie positive de la maille.

On peut alors en déduire la matrice d'incidence $M(m_{ij})$ et résoudre le système pour les courants inconnus i_e .

II - 2. : Traitement des impédances mutuelles.

Un des avantages de la méthode des mailles est le fait que les impédances mutuelles entrent facilement dans les calculs comme éléments non-diagonaux de la matrice primitive d'impédance. Pour déterminer leur signe regardons le circuit suivant contenant deux éléments qui sont couplés mutuellement:



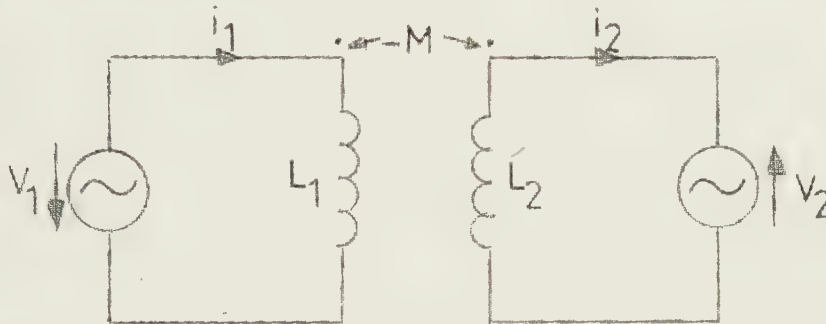
En tenant compte du sens des courants et des tensions on peut écrire les équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

qui représentent la relation entre les tensions et les courants du système des deux éléments couplés.

Si l'on choisit un autre sens pour les courants et de ce fait pour les tensions, on ne doit pas changer le contenu physique des équations (1). C'est pour cela que la matrice d'impédance dans (1) doit être modifiée elle aussi lorsque l'on change le sens des courants.

Si par exemple les sens de i_2 et V_2 avaient été inversés dans l'exemple précédent.



On aurait dû remplacer M par $-M$ pour satisfaire (1) :

$$\begin{vmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_1 & -M \\ -M & L_2 \end{vmatrix} \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} i_1 \\ -i_2 \end{vmatrix}$$

Donc en conclusion le signe de l'élément Z_{ij} de la matrice primitive d'impédance Z_{pr} dépend du sens initialement choisi pour les courants.

Il est positif lorsque les éléments qui sont couplés mutuellement sont parcourus dans le même sens et vice et versa.

II - 3. : Arbre.

Soit G un graphe connexe contenant n noeuds. D'après la définition, un arbre est un sous-réseau connexe sans cycles qui relie tous les noeuds du graphe donné. Cette définition permet de choisir sans difficulté un arbre dans un réseau dont le dessin est donné. Mais puisque sur ordinateur le réseau est décrit par une liste d'éléments, il est nécessaire de construire un algorithme qui détermine les branches de l'arbre. L'algorithme que nous avons mis au point procède par récurrence et détermine l'arbre pas à pas :

Soit

$$A_0 = \phi \quad (\phi : \text{ensemble vide})$$

qui évidemment est sans cycle.

S'il y a un élément :

$$e_1 \in E - A_0$$

tel que

$$A_0 \cup e_1$$

ne contienne pas de cycle, on a

$$A_1 = A_0 \cup e_1$$

$$A_2 = A_1 \cup e_2$$

$$\vdots$$

$$A_i = A_{i-1} \cup e_i$$

Si tout élément e_i ne ferme pas de cycle dans A_{i-1} , l'arbre A est donné par

$$A = \bigcup_{i=1}^{n-1} e_i$$

II - 4. : Algorithme de génération de l'Arbre.

Tout algorithme de génération de l'arbre dans un réseau de n noeuds et de e éléments établit successivement la liste de l'arbre en choisissant à la fois une nouvelle branche qui est ajoutée à la liste si elle satisfait aux conditions issues de la définition de l'arbre.

Si l'on a déjà choisi i branches de l'arbre, il faut choisir la (i+1)-ième parmi les (e-i) éléments restants.

C'est ce choix qui est le point critique de beaucoup de méthodes de génération car il demande trop d'opérations de comparaison coûteuses en temps de calcul ce qui est rédhibitoire dans l'étude des grands réseaux.

C'est pour cette raison que nous utilisons un algorithme qui évite des comparaisons et trouve en même temps les branches de l'arbre et celles du co-arbre correspondant.

L'idée principale de cette méthode se trouve déjà dans l'oeuvre de Feussner (24) où on avait besoin de tous les arbres d'un réseau donné pour l'application de 3ième et 4ième loi de Kirchhoff (22), (23).

Dans le réseau donné représenté par son graphe G on choisit une première branche quelconque de l'arbre, puis on court-circuite les deux noeuds de cette branche pour trouver un nouveau graphe G'. Ce court-circuit élimine toutes les branches qui sont en parallèle sur la branche choisie et qui font partie du co-arbre.

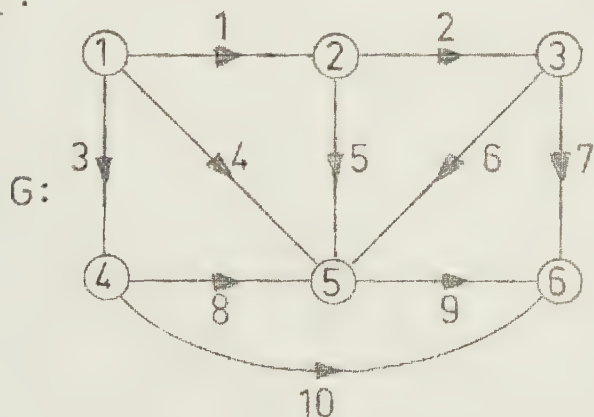
On choisit ensuite n'importe quel élément dans G' comme deuxième branche de l'arbre. Il n'y a aucune restriction et aucune comparaison à faire puisqu'il n'y a pas d'élément en G' qui pourrait former un cycle avec la branche précédemment choisie dans G.

On court-circuite alors les deux noeuds de la dernière branche pour trouver un graphe G'', ainsi de suite.

Quand on est arrivé au graphe $G^{(n-1)}$ on a trouvé un arbre et son co-arbre correspondant.

Selon la numérotation des arêtes du graphe G cette méthode permet de déterminer un arbre qui contient un nombre maximum de branches prescrites.

Exemple :

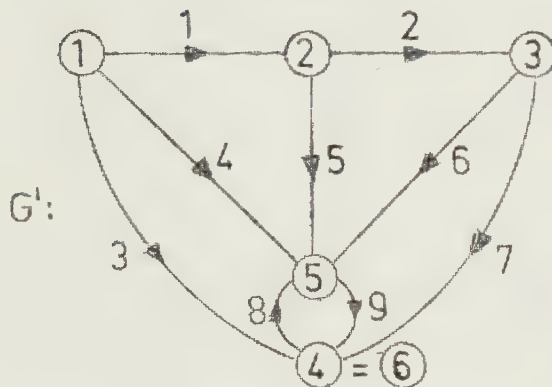


1	1	2
2	2	3
3	1	4
4	1	5
5	2	5
6	3	5
7	3	6
8	4	5
9	5	6
10	4	6

Au premier pas on choisit la branche 10 comme branche de l'arbre, on l'écrit donc dans la liste de l'arbre ARBRE et on court-circuite les noeuds 4 et 6 ce qui peut être exprimé dans la liste en remplaçant 4 par 6 (ou bien 6 par 4) dans les colonnes 2 et 3.

ARBRE = 10

CO-ARBRE = -



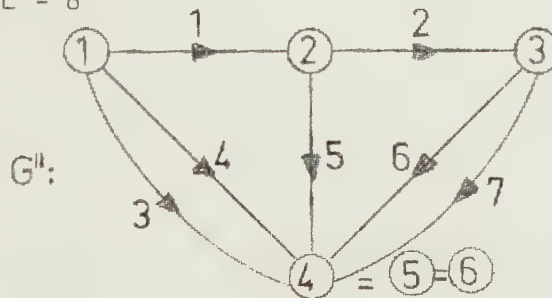
1	1	2
2	2	3
3	1	6
4	1	5
5	2	5
6	3	5
7	3	6
8	6	5
9	5	6
10	6	6

ARBRE

Si dans la liste apparaissent deux mêmes numéros dans les colonnes 2 et 3 on peut enlever la ligne correspondante. Si cette ligne est celle de la branche qu'on avait choisi comme branche de l'arbre, on l'écrit dans la liste de l'arbre, sinon dans la liste de co-arbre.

ARBRE = 10, 9

CO-ARBRE = 8

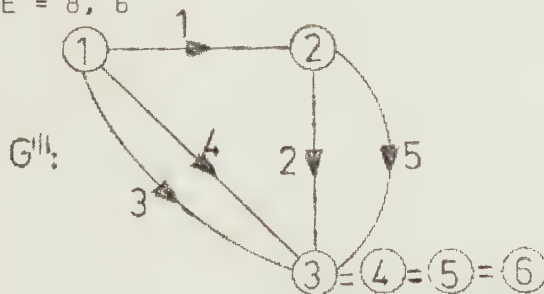


1	1	2
2	2	3
3	1	6
4	1	6
5	2	6
6	3	6
7	3	6
8	6	6
9	6	6

CO-ARBRE
ARBRE

ARBRE = 10, 9, 7

CO-ARBRE = 8, 6

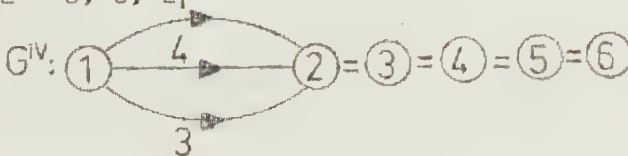


1	1	2
2	2	6
3	1	6
4	1	6
5	2	6
6	6	6
7	6	6

CO-ARBRE
ARBRE

ARBRE = 10, 9, 7, 5

CO-ARBRE = 8, 6, 2



1	1	6
2	6	6
3	1	6
4	1	6
5	6	6

CO-ARBRE
ARBRE

ARBRE = 10, 9, 7, 5, 4

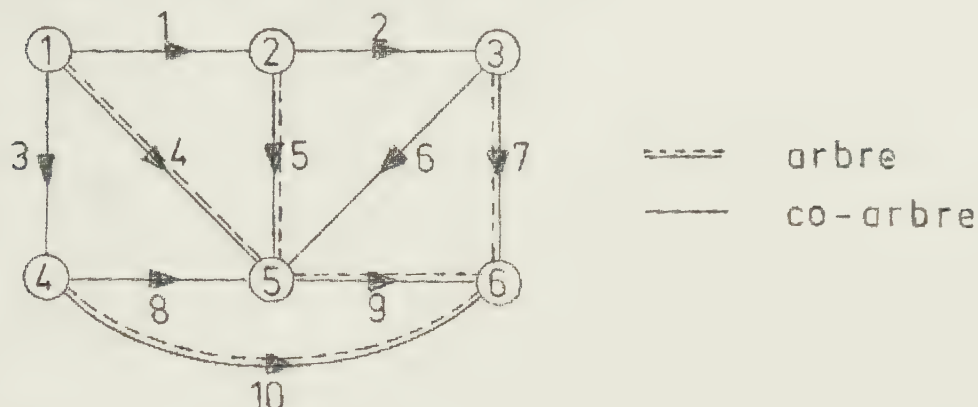
CO-ARBRE = 8, 6, 2, 3, 1



1	6	6
3	6	6
4	6	6

CO-ARBRE
CO-ARBRE
ARBRE

Le réseau contient donc l'arbre suivant :



Si pour l'application du 3ème et 4ème loi de Kirchhoff on veut calculer l'ensemble de tous les arbres d'un réseau (n^{n-2} arbres pour un graphe complet de n noeuds), on peut se baser sur le même algorithme. Le programme correspondant a été écrit en ALGOL.

II - 5. : Maille et matrice d'incidence branches-maillages.

Chacune des $(e - n + 1)$ mailles indépendantes d'un réseau connexe est formée en fermant une branche du co-arbre par des branches de l'arbre. Pour chaque maille il y a un ensemble et un seul bien défini de branches de l'arbre. En effet s'il y en avait plusieurs, l'arbre contiendrait des cycles ce qui est contraire à la définition.

Pour chaque maille on établit donc une liste dans laquelle figurent toutes les branches de l'arbre (dont certains qui n'appartiennent pas à la maille devront être éliminées) et à laquelle on adjoint successivement toutes les branches du co-arbre.

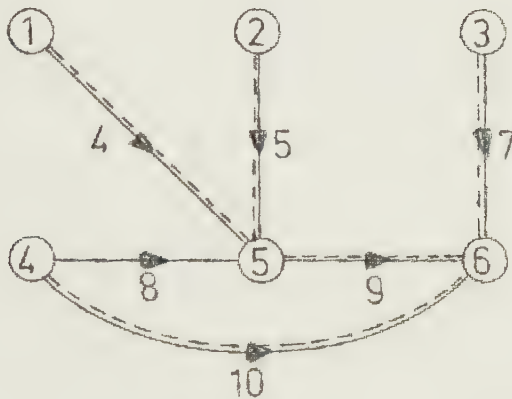
Pour qu'un élément de cette liste fasse partie de la maille il est nécessaire que chacun de ses noeuds figure une deuxième fois dans la liste. Donc dans un premier temps on élimine tous les éléments qui contiennent des noeuds de degré 1. Cette élimination est répétée jusqu'à ce que tous les noeuds présents soient du degré 2. Regardons à titre d'exemple la première maille du réseau de II - 4:

ARBRE

10	4	6
9	5	6
7	3	6
5	2	5
4	1	5

CO-ARBRE

8	4	5
6	3	5
3	1	4
2	2	3
1	1	2



MAILLE

8	4	5
10	4	6
9	5	6
7	3	6
5	2	5
4	1	5

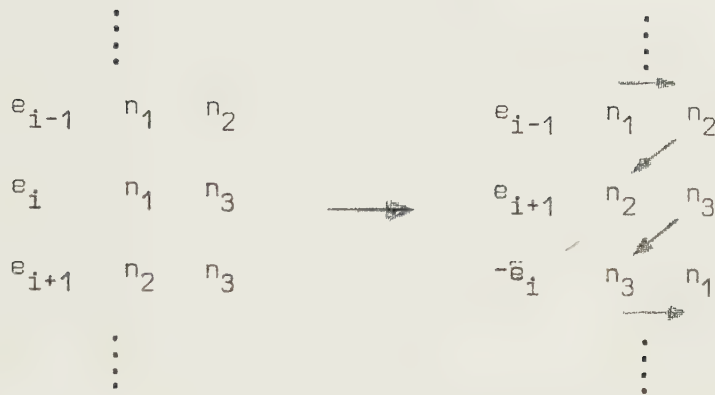
Pour éliminer les branches qui n'appartiennent pas à la maille (4, 5 et 7 dans l'exemple) on enlève les lignes qui contiennent des noeuds du degré 1 (1 , 2 et 3) et on obtient :

MAILLE

8	4	5
10	4	6
9	5	6

où tous les noeuds sont bivalents.

Quand toutes les mailles indépendantes sont connues, il faut en déduire la matrice d'incidence arêtes-mailles. Pour cela il est nécessaire d'attribuer une direction à chaque maille. La direction choisie sera celle de la branche du co-arbre associé à la maille. Pour déterminer les direction des autres éléments de la maille par rapport à la direction choisie il les faut ranger de manière à obtenir un circuit :



Pour le réseau de II - 4. la matrice d'incidence M devient :

	I	II	III	IV	V
1					1
2			1		
3				1	
4				-1	-1
M = 5			-1		1
6		1			
7		-1	1		
8	1				
9	1	1	-1	-1	
10	-1			1	

II - 6. : Résultats.

Noeuds	Arêtes	Mailles	Temps/sec
4	9	6	9.0
5	10	6	9.0
14	20	7	10.2
30	41	12	36.3
40	72	33	196.08

Calcul des courants dans les arêtes

L'algorithme de génération de l'arbre a été mis au point et expérimenté sur IBM 360 du Centre de Calcul de l'Université de Grenoble. La détermination d'un arbre dans un réseau de 51 noeuds et de 117 arêtes ne demande que 2.27 sec. : la détermination de 560 arbres différents dans un réseau de 10 noeuds et de 16 arêtes demande 6.03 sec. L'avantage principal de cet algorithme dans l'étude des grands systèmes est sa rapidité de fonctionnement qui est remarquable et rend de ce fait son utilisation compétitive.

Chapitre III : Méthode des noeuds

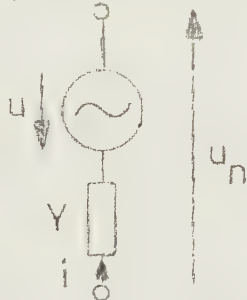
III - 1. : Equations nodales.

Dans la méthode des noeuds on choisit un noeud comme noeud de référence et on cherche la différence de potentiel des n autres noeuds par rapport à ce noeud de référence. Une fois les tensions nodales trouvées, on peut facilement calculer les courants dans toutes les arêtes du réseau.

On appelle :

- V vecteur des tensions nodales (ordre n)
- D matrice d'incidence éléments-noeuds (ordre e, n)
- D^t transposé de D (ordre n, e)
- u_n vecteur des tensions d'éléments (ordre e)
- u vecteur des sources de tension (ordre e)
- i vecteur des courants dans les arêtes (ordre e)
- y matrice primitive d'admittance $y = Z_{pr}^{-1}$ (ordre e, e)
- y_{nn} matrice nodale d'admittance (ordre n, n)
- Z_{nn} matrice nodale d'impédance $Z_{nn} = y_{nn}^{-1}$ (ordre n, n)
- I_n vecteur des sources de courant (ordre n)

Chaque élément du réseau peut être décrit par ses variables sous forme nodale :



Avec des notations choisies les équations du réseau s'écrivent :

$$\begin{array}{ll}
 u_n = D \cdot V & (1) \\
 D^t \cdot i = 0 & (2) \\
 i = y \cdot (u - u_n) & (3)
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} \\ \\ \text{Lois de Kirchhoff} \end{array} \right.$$

En remplaçant i et u_n dans (2) on a

$$D^t \cdot y \cdot u = D^t \cdot y \cdot u_n = 0$$

$$D^t \cdot y \cdot u = D^t \cdot y \cdot D \cdot V \quad (4)$$

On définit la matrice nodale d'admittance

$$y_{nn} = D^t \cdot y \cdot D$$

Si l'on effectue les multiplications à gauche et à droite par les matrices D^t et D , on voit que les éléments de y_{nn} (y_{ij}) sont donnés par des simples opérations algébriques :

y_{ii} somme des admittances partant du noeud i

y_{ij} somme négative des admittances entre les noeuds i et j

Donc (4) devient :

$$V = y_{nn}^{-1} \cdot D^t \cdot y \cdot u \quad (5)$$

Le produit

$$D^t \cdot y \cdot u$$

donne la transformation du vecteur des sources de tension en un vecteur de sources de courant équivalentes I_n injectées aux noeuds n :

$$I_n = D^t \cdot y \cdot u$$

Le calcul des tensions nodales

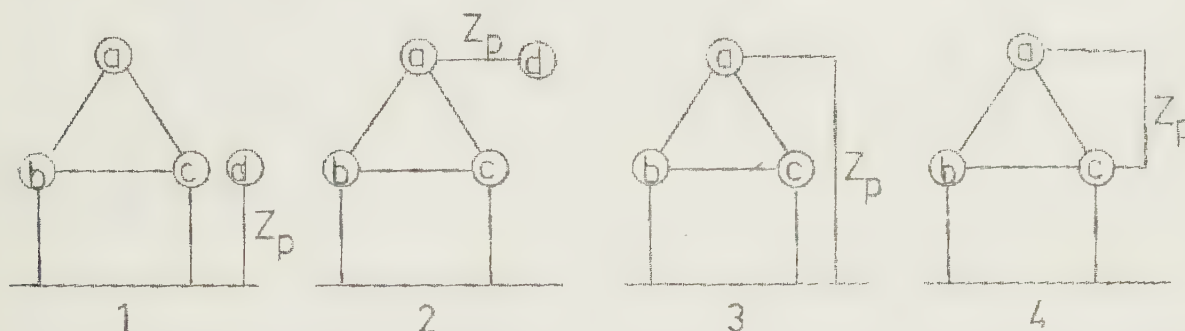
$$V = y_{nn}^{-1} \cdot I_n$$

nécessite la détermination de l'inverse de y_{nn} . Il existe une méthode de récurrence qui en ajoutant un élément après l'autre permet la détermination directe de $Z_{nn} = y_{nn}^{-1}$. Cette méthode qui ne demande que des opérations simples sur des matrices va être l'objet du paragraphe suivant.

III - 2. : Génération de la matrice d'impédance nodale Z_{BUS} .

La matrice d'impédance nodale Z_{nn} , souvent appelée Z_{BUS} , est une matrice symétrique d'ordre $n.n$.

Si l'on part d'un réseau donné dont on connaît Z_{nn} , on peut lui ajouter un nouvel élément contenant l'impédance Z_p de 4 manières différentes :



On voit qu'un nouveau noeud (d) est introduit dans les types 1 et 2 seulement; ce n'est que dans ces deux cas que l'ordre de la matrice d'impédance va augmenter. L'élément ajouté dans les types 3 et 4 entraînera un changement de la matrice Z_{nn} sans augmentation de l'ordre.

L'étude des formules de génération est bien décrite dans (1), et l'on se contente de les rappeler dans le tableau à la page 21.

III - 3. : Traitement des impédances mutuelles.

La présence d'éléments couplés mutuellement complique pas mal la génération de la matrice d'impédance nodale. C'est surtout entre des lignes voisines que ces couplages interviennent. Dans (1) on propose un algorithme de génération de Z_{BUS} pour des réseaux contenant des mutuelles. A chaque pas où on ajoute un élément qui est couplé mutuellement à d'autres, il faut d'abord établir la matrice primitive d'impédance des éléments qui ont été déjà introduit dans le calcul. Puis cette matrice doit être inversée pour trouver la matrice primitive d'admittance dont un certain nombre d'éléments entrent dans le calcul de Z_{BUS} .

Ces inversions multiples demandent beaucoup de temps de calcul et rendent cette méthode inefficace pour des grands réseaux contenant des impédances mutuelles. Un autre auteur (27) propose une méthode plus élégante qui consiste à générer d'abord Z_{BUS} sans tenir compte des mutuelles et puis d'introduire l'effet des impédances mutuelles par une seule inversion et plusieurs multiplications matricielles. La taille de la matrice à inverser dépend du nombre des éléments couplés. Cette méthode demande le rangement des noeuds du réseau dans un ordre donné, ce qui peut entraîner des difficultés et une perte de temps certaine.

$Z_{dd} = \begin{vmatrix} Z_{nn} & Z_{ng} \\ Z_{gn}^t & Z_{gg} \end{vmatrix} \quad Z_{nn} = \begin{vmatrix} Z_a & Z_b & Z_c \end{vmatrix} \quad Z_a = \begin{vmatrix} Z_{aa} \\ Z_{ba} \\ Z_{ca} \end{vmatrix} \quad Z_b = \begin{vmatrix} Z_{ab} \\ Z_{bb} \\ Z_{cb} \end{vmatrix} \quad Z_c = \begin{vmatrix} Z_{ca} \\ Z_{cb} \\ Z_{cc} \end{vmatrix}$		
type	éléments de Z_{dd}	résultat
1	$Z_{nn} = Z_{old}$ $Z_{ng} = Z_{gn}^t = 0$ $Z_{gg} = Z_p$	$Z_{new} = Z_{old}$
2	$Z_{nn} = Z_{old}$ $Z_{ng} = Z_{gn}^t = Z_a$ $Z_{gg} = Z_{aa} + Z_p$	$Z_{new} = Z_{old}$
3	$Z_{nn} = Z_{old}$ $Z_{ng} = Z_{gn}^t = Z_a$ $Z_{gg} = Z_{aa} + Z_p$	$Z_{new} = Z_{nn} - Z_{ng} \cdot Z_{gg}^{-1} \cdot Z_{gn}^t$ Z_{ng} vecteur de colonne Z_{gn}^t vecteur de ligne Z_{gg} scalaire
4	$Z_{nn} = Z_{old}$ $Z_{ng} = Z_{gn}^t = Z_a - Z_b$ $Z_{gg} = Z_{aa} + Z_{bb} - 2Z_{ab} + Z_p$	$Z_{new} = Z_{nn} - Z_{ng} \cdot Z_{gg}^{-1} \cdot Z_{gn}^t$ Z_{ng} vecteur de colonne Z_{gn}^t vecteur de ligne Z_{gg} scalaire

Dans d'autres articles (25) le problème des mutuelles est résolu en remplaçant les éléments couplés par des schémas équivalents sans impédances mutuelles.

Nous avons choisi une méthode qui nous semble résoudre le mieux le problème des mutuelles (26). L'idée de ce procédé consiste dans un élargissement des formules de génération de Z_{BUS} de telle manière que les éléments couplés soient introduits dans l'algorithme par groupes entiers.

On admet deux différents types de groupes qui peuvent être ajoutés

- a) des groupes qui introduisent des nouveaux noeuds
- b) des groupes qui ferment des cycles

Pour les groupes (a) on peut utiliser les formules du type 2 et pour ceux du type (b) celles du type 4 du paragraphe III-2 avec les modifications suivantes :

$$\begin{aligned}\text{type 2 : } Z_{nn} &= Z_{old} \\ Z_{ng} &= Z_{gn}^t = Z_a \\ Z_{gg} &= Z_{aa} + Z_p \\ Z_{new} &= Z_{old}\end{aligned}$$

Z_a : matrice (n,c) correspondant aux noeuds auxquels le groupe est ajouté

Z_{aa} : matrice (c,c)

Z_p : matrice primitive d'impédance des éléments couplés (c,c)

où n représente le nombre de noeuds déjà introduits et c le nombre d'éléments couplés dans un groupe.

$$\begin{aligned}\text{type 4 : } Z_{nn} &= Z_{old} \\ Z_{ng} &= Z_{gn}^t = Z_a - Z_b \\ Z_{gg} &= Z_{aa} + Z_{bb} - Z_{ab} - Z_{ba} + Z_p \\ Z_{new} &= Z_{nn} - Z_{ng} \cdot Z_{gg}^{-1} \cdot Z_{gn}^t \quad (1)\end{aligned}$$

Z_a, Z_b : matrices (n,c) correspondant aux noeuds entre lesquels le groupe est ajouté

$Z_{aa}, Z_{bb}, Z_{ab}, Z_{ba}$: matrices (c,c)

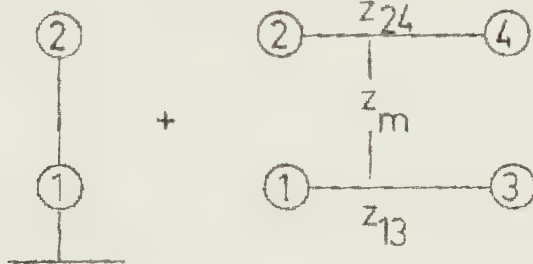
Z_p : matrice primitive d'impédance des éléments couplés (c,c)

avec n comme nombre de noeuds déjà introduits et c comme nombre d'éléments couplés dans un groupe.

La seule inversion à effectuer est celle de la matrice Z_{gg} dans la formule de réduction de Kron (1). Puisque l'ordre de Z_{gg} dépend du nombre d'éléments couplés qui est rarement élevé l'inversion ne pose pas de problème.

Exemple :

a) Un groupe de 2 éléments couplés est ajouté à un réseau de 2 noeuds :



$$Z_{nn} = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{vmatrix}$$

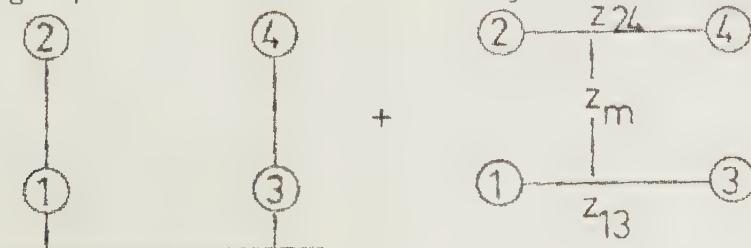
$$Z_a = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{vmatrix}$$

$$Z_{aa} = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{vmatrix}$$

$$Z_p = \begin{vmatrix} Z_{13} & Z_m \\ Z_m & Z_{24} \end{vmatrix}$$

$$Z_{new} = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} & Z_{12} & Z_{22} \\ \hline Z_{11} & Z_{12} & Z_{11} + Z_{13} & Z_{12} + Z_m \\ Z_{12} & Z_{22} & Z_{12} + Z_m & Z_{22} + Z_{24} \end{vmatrix}$$

b) Un groupe de 2 éléments ferme un cycle dans un réseau de 4 noeuds :



$$Z_{nn} = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} \\ Z_{12} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} \\ Z_{13} & Z_{23} & Z_{33} & Z_{34} \\ Z_{14} & Z_{24} & Z_{34} & Z_{44} \end{vmatrix} \quad Z_a = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} \\ Z_{13} & Z_{23} \\ Z_{14} & Z_{24} \end{vmatrix} \quad Z_b = \begin{vmatrix} Z_{13} & Z_{14} \\ Z_{23} & Z_{24} \\ Z_{33} & Z_{34} \\ Z_{34} & Z_{44} \end{vmatrix}$$

$$Z_{aa} = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12} & Z_{22} \end{vmatrix} \quad Z_{bb} = \begin{vmatrix} Z_{33} & Z_{34} \\ Z_{34} & Z_{44} \end{vmatrix} \quad Z_{ab} = \begin{vmatrix} Z_{13} & Z_{23} \\ Z_{14} & Z_{24} \end{vmatrix}$$

$$Z_{ba} = \begin{vmatrix} Z_{13} & Z_{14} \\ Z_{23} & Z_{24} \end{vmatrix} \quad Z_p = \begin{vmatrix} Z_{13} & Z_m \\ Z_m & Z_{24} \end{vmatrix} \quad Z_{ng} = \begin{vmatrix} Z_{11} - Z_{13} & Z_{12} - Z_{14} \\ Z_{12} - Z_{23} & Z_{22} - Z_{24} \\ Z_{13} - Z_{33} & Z_{23} - Z_{34} \\ Z_{14} - Z_{34} & Z_{24} - Z_{44} \end{vmatrix}$$

$$Z_{gg} = \begin{vmatrix} Z_{11} - Z_{23} - 2 Z_{13} + Z_{13} & Z_{12} + Z_{34} - Z_{23} - Z_{14} + Z_m \\ Z_{12} + Z_{34} - Z_{14} - Z_{23} + Z_m & Z_{22} + Z_{14} - 2 Z_{24} + Z_{24} \end{vmatrix}$$

$$Z_{new} = Z_{nn} - Z_{ng} \cdot Z_{gg}^{-1} \cdot Z_{gn}^t$$

III - 4. : Inversion d'une matrice symétrique.

La méthode de génération de la matrice d'impédance nodale peut être utilisée pour l'inversion des matrices symétriques.

Soit Y (n,n) une matrice symétrique à inverser :

$$Y = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1n} \\ Y_{12} & \cdot & & \\ \vdots & & \ddots & \\ Y_{1n} & & & Y_{nn} \end{vmatrix}$$

Y peut être regardé comme matrice nodale d'admittance d'un réseau électrique.

Donc d'après la définition de la matrice nodale d'admittance on sait

que le réseau comporte $n + 1$ noeuds

que tout élément diagonal Y_{ii} est égal à la somme des admittances partant du noeud i

que tout élément non-diagonal Y_{ij} correspond à l'admittance négative entre les noeuds i et j

En tenant compte de ces propriétés on peut établir la liste d'éléments de ce réseau :

$$Z_{o1} = 1 / (Y_{11} + Y_{12} + \dots + Y_{1n})$$

$$Z_{on} = 1 / \sum_i Y_{ni} = 1 / \sum \text{de la ligne } n$$

$$Z_{12} = - 1 / Y_{12}$$

$$Z_{ij} = - 1 / Y_{ij} \quad (i < j)$$

Les n^2 éléments de la matrice Y se réduisent donc à $n(n-1)/2$ éléments de la liste à cause de la symétrie. Aux valeurs de cette liste on applique l'algorithme de génération de la matrice nodale d'impédance Z_{BUS} pour trouver l'inverse de la matrice donnée Y.

Pour des Y_{ij} égales à zéro les éléments correspondants dans la liste n'existent pas ; donc on obtient encore des réductions considérables pour l'inversion des matrices creuses. Les temps de calculs sont similaires à ceux qu'on trouve avec la méthode de Choleski.

III - 5. : Résultats.

Réseau		Temps de calcul / sec.		
nombre de noeuds n	nombre d'élém. e	Génér. de Z_{BUS}	Tensions à tous les noeuds V_n	Total
10	32	32.4	0.3	32.7
14 *	34	51.6	0.6	52.2
20	64	171.0	1.8	172.8
30 *	71	294.4	5.8	300.2

* IEEE test system

Deuxième partie : Analyse des défauts en régime permanent

Chapitre I : Méthodes utilisant la matrice d'impédance nodale

I - 1. : Extraction d'un élément

Un problème courant consiste pour un réseau donné dont on connaît la matrice d'impédance nodale Z_{nn} , les tensions et les courants à déterminer son état lors de modifications voulues ou occasionnelles. Pour des raisons de sécurité il est par exemple nécessaire de savoir si le déclenchement d'une ou de plusieurs lignes entraînera ou non une surcharge des autres éléments du réseau.

On perdrait trop de temps si pour tout changement dans le réseau il fallait générer une nouvelle matrice Z_{nn} . C'est pour cette raison que l'on préfère étudier les modifications de la matrice du réseau initial, provoquées par un déclenchement.

Soit Z_{nn} la matrice d'impédance de ce réseau. Lorsque l'on ajoute deux éléments en parallèle contenant comme impédances Z_p et $-Z_p$ respectivement entre le noeud i du réseau et le point de référence, la matrice d'impédance nodale du nouveau réseau est donné par la formule de Kron

$$Z'_{nn} = Z_{nn} - Z_{ng} \cdot Z_{gg}^{-1} \cdot Z_{gn}^t$$

(avec les mêmes notations comme en III-2 de la première partie), avec

$$Z_{ng} = \begin{bmatrix} Z_{i1} & Z_{i1} \\ \vdots & \vdots \\ Z_{ii} & Z_{ii} \\ \vdots & \vdots \\ Z_{in} & Z_{in} \end{bmatrix} \quad Z_{gg} = \begin{bmatrix} Z_{ii} + Z_p & Z_{ii} \\ Z_{ii} & Z_{ii} - Z_p \end{bmatrix}$$

d'où

$$Z_{gg}^{-1} = -\frac{1}{Z_p^2} \begin{bmatrix} Z_{ii} - Z_p & -Z_{ii} \\ -Z_{ii} & Z_{ii} + Z_p \end{bmatrix}$$

Alors :

$$Z_{ng} \cdot Z_{gg}^{-1} \cdot Z_{gn}^t = - \frac{1}{Z_p} \begin{vmatrix} Z_{i1} & Z_{i1} \\ \vdots & \vdots \\ Z_{ii} & Z_{ii} \\ \vdots & \vdots \\ Z_{in} & Z_{in} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Z_{ii} - Z_p & -Z_{ii} \\ -Z_{ii} & Z_{ii} + Z_p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Z_{i1} \dots Z_{ii} \dots Z_{in} \\ Z_{i1} \dots Z_{ii} \dots Z_{in} \end{vmatrix}$$

$$= - \frac{1}{Z_p} \begin{vmatrix} -Z_{i1}Z_p & Z_{i1}Z_p \\ -Z_{ii}Z_p & Z_{ii}Z_p \\ -Z_{in}Z_p & Z_{in}Z_p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Z_{i1} & \dots & Z_{ii} & \dots & Z_{in} \\ Z_{i1} & \dots & Z_{ii} & \dots & Z_{in} \end{vmatrix} = |0|$$

il vient $Z'_{nn} = Z_{nn}$

On voit donc que la matrice Z_{nn} du réseau ne change pas lorsqu'on ajoute en parallèle deux éléments dont la somme des impédances est égale à zéro.

Cela signifie que l'on peut simuler l'extraction d'un élément du réseau en ajoutant en parallèle un élément ayant la même impédance avec le signe opposé et en appliquant les formules de génération de Z_{nn} . Il est évident que ce qui a été démontré pour un élément entre un noeud et le point de référence est aussi vrai pour deux noeuds quelconques.

Toute modification du réseau ne requiert donc que le calcul d'un terme correctif et non la génération d'une nouvelle matrice ce qui permet un gain considérable de temps.

I - 2. : Court-circuits.

Pour dimensionner un système efficace de protection d'un réseau électrique (relais, interrupteurs) il est nécessaire de connaître les tensions et les courants en de nombreux endroits du réseau et pour différents types de défauts. Avant l'utilisation des ordinateurs digitaux ces informations étaient fournies par le calculateur analogique. L'apparition des ordinateurs numériques entraîna la mise en service de programmes de calcul de court-circuit qui au début étaient très peu performants car avec la méthode proposée chaque localisation de défaut obligeait à recommencer tous les calculs.

L'algorithme de génération de Z_{BUS} permet de faire les calculs de court-circuit en beaucoup moins de temps. Comme on l'a vu pour l'extraction qui n'est autre que l'insertion d'éléments possédant une impédance particulière, tout court-circuit possible peut être représenté en ajoutant un ou plusieurs éléments dont les impédances caractérisent le type de défaut considéré.

On peut ainsi déterminer tous les court-circuits théoriquement possibles entre les divers points d'un réseau, possibilité intéressante pour le calcul et l'analyse des circuits.

Dans les réseaux de distribution les défauts qui surviennent en pratique sont :

- a) cc entre un noeud et la terre
- b) cc entre deux noeuds
- c) cc entre deux noeuds avec mise à la terre

Le calcul d'un défaut se passe en deux étapes. Dans un premier temps on détermine les tensions avant le défaut en effectuant la multiplication entre Z_{BUS} et le vecteur des sources de courant. Ensuite on calcule un vecteur de termes correctifs dûs au court-circuit. Ce vecteur ne fait intervenir que les éléments de Z_{BUS} .

Regardons un court-circuit entre un noeud (a) et le point de référence. Lorsqu'on ajoute un élément contenant l'impédance Z_p entre le noeud (a) et le noeud de référence d'un réseau décrit par sa matrice d'impédance nodale Z_{nn} , on trouve pour la nouvelle matrice Z_{new} :

$$Z_{new} = Z_{nn} - Z_a \cdot Z_{gg}^{-1} \cdot Z_a^t \quad (1)$$

avec

$$Z_{gg} = Z_{aa} + Z_p$$

Z_a étant la colonne dans Z_{nn} qui correspond au noeud (a) ,

Z_a^t sa transposée et Z_{aa} l'élément diagonal (a) - (a) .

Si dans (1) on ne soustrait pas numériquement les termes de Z_{nn} et de $Z_a \cdot Z_{gg}^{-1} \cdot Z_a^t$, les tensions V_{new} sont données par

$$V_{new} = Z_{nn} \cdot I_n - Z_a \cdot Z_{gg}^{-1} \cdot Z_a^t \cdot I_n = V_n' - V_n''$$

En appelant Z_p impédance de court-circuit on peut dire que V_n' représente les tensions avant le court-circuit.

$$V'_n = Z_{nn} \cdot I_n$$

et V''_n les termes correctifs dûs au court-circuit

$$V''_n = Z_a \cdot Z_{gg}^{-1} \cdot Z_a^t \cdot I_n$$

Pour un court-circuit franc on trouve

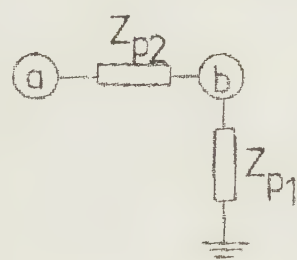
$$Z_p = 0$$

$$Z_{gg} = Z_{aa}$$

Donc

$$\begin{aligned} V_{cc} &= Z_{nn} \cdot I_n - Z_a \cdot Z_{aa}^{-1} \cdot Z_a^t \cdot I_n \\ &= Z_{nn} \cdot I_n - \frac{1}{Z_{aa}} (Z_a \cdot Z_a^t) \cdot I_n \end{aligned}$$

Les résultats obtenus pour les différents types de court-circuit sont résumés dans le tableau à la page 31.

Type de court-circuit	Tensions avant le défaut	Tensions de défaut
	$Z_{nn} \cdot I_n$	$Z_{nn} \cdot I_n - Z_a \cdot Z_{gg}^{-1} \cdot Z_a^t \cdot I_n$ $Z_{gg} = Z_{aa} + Z_p$
	$Z_{nn} \cdot I_n$	$Z_{nn} \cdot I_n - Z_c \cdot Z_{gg}^{-1} \cdot Z_c^t \cdot I_n$ $Z_c = Z_a - Z_b$ $Z_{gg} = Z_{aa} + Z_{bb} - 2Z_{ab} + Z_p$
	$Z_{nn} \cdot I_n$	$Z_{nn} \cdot I_n - Z_d \cdot Z_{gg}^{-1} \cdot Z_d^t \cdot I_n$ $Z_d = (Z_a, Z_a - Z_b)$ $Z_{gg} = \begin{vmatrix} Z_{aa} + Z_{p1} & Z_{aa} - Z_{ab} \\ Z_{aa} - Z_{ab} & Z_{aa} + Z_{bb} - 2Z_{ab} + Z_{p2} \end{vmatrix}$

Tensions de court-circuit pour
différents type de défaut
(Z_{p1} , Z_{p1} , Z_{p2} : impédances de défaut)

El-Abiad (1) calcule les tensions de court-circuit après avoir généré Z_{nn} par application du théorème de Thévenin.

Pour un défaut au noeud (a) il trouve alors

$$V_{cc} = V'_n - Z_a \cdot Z_{aa}^{-1} \cdot V'_a \quad (2)$$

avec V'_n = tensions avant le défaut

V'_a = tensions au noeud (a) avant le défaut

Par définition on a :

$$V'_n = Z_{nn} \cdot I_n$$

$$V'_a = D^t \cdot V'_n$$

$$Z_a = Z_{nn} \cdot D$$

avec

D, D^t = matrice d'incidence et sa transposée

donc

$$\begin{aligned} V_{cc} &= Z_{nn} \cdot I_n - Z_{nn} \cdot D \cdot Z_{aa}^{-1} \cdot D^t \cdot Z_{nn} \cdot I_n \\ &= Z_{nn} \cdot I_n - Z_a \cdot Z_{aa}^{-1} \cdot Z_a^t \cdot I_n \end{aligned} \quad (3)$$

Bien que (2) ne diffère de notre formule (3) que dans la formulation, il nous semble préférable de bien mettre en évidence le fait qu'un court-circuit n'est que l'introduction d'éléments particuliers au réseau.

Cette remarque prendra tout son intérêt au cours du chapitre suivant dans l'étude des défauts par la méthode des partitions (diakoptics).

I - 3. : Mutuelles.

On a déjà vu qu'on attribue des directions arbitraires au début des calculs à tous les courants. Si le réseau comporte des éléments couplés mutuellement c'est le sens des courants qui indique le signe de l'impédance mutuelle.

Si un courant prend dans la réalité la direction opposée cela est sans effet sur le calcul :



Pour les courants i_1 et i_2 dans le même sens on obtient :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Si en réalité i_2 et V_2 deviennent négatives on a

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

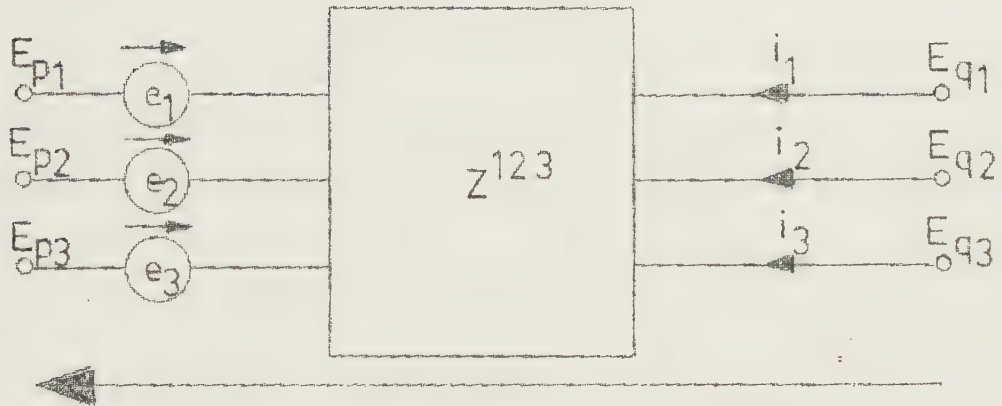
On trouve donc les mêmes résultats que si l'on avait choisi initialement les directions réelles pour les courants et une mutuelle négative



Il est donc sans importance, une fois les directions admises, que les courants réels gardent ou non cette direction.

I - 4. : Calculs des court-circuits dans un réseau triphasé.

Un système triphasé peut généralement être représenté par le schéma suivant :



$$\begin{aligned} v_1 &= E_{p1} - E_{q1} \\ v_2 &= E_{p2} - E_{q2} \\ v_3 &= E_{p3} - E_{q3} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{vmatrix}$$

Pour un système qui contient des machines tournantes on a :

$$Z_{11} = Z_{22} = Z_{33} = Z$$

$$Z_{12} = Z_{23} = Z_{31} = Z'$$

$$Z_{21} = Z_{13} = Z_{32} = Z''$$

et pour un système passif et équilibré

$$Z'' = Z'$$

Comme dans les calculs de court-circuit dans un réseau monophasé les tensions dans un système triphasé sont déterminées en deux étapes :

1° Les tensions avant le défaut

$$V'_n = Z_{nn} \cdot I_n$$

2° Les termes correctifs dû au défaut

$$V''_n = Z_a \cdot Z_{gg}^{-1} \cdot Z_a^t \cdot I_n$$

Cette séparation en V'_n et V''_n présente un grand avantage; car la plupart des réseaux étant symétriques et équilibrés, on peut utiliser un système de composantes pour la résolution du système avant le défaut.

En choisissant les composantes symétriques on trouve :

1° - a) Système de f.e.m. équilibré

α) réseau contenant des machines tournantes

$$\begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix} V_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix} e_1 = \begin{bmatrix} Z & Z' & Z'' \\ Z'' & Z & Z' \\ Z' & Z'' & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix} i_1$$

En multipliant à gauche par la matrice conjuguée transposée $[1, a, a^2]$ on obtient

$$V_1 + e_1 = (Z + a^2 Z' + a Z'') i_1$$

β) réseau passif

$$V_1 + e_1 = (Z - Z') i_1$$

b) Système de f.e.m. non-équilibrées

On trouve trois équations indépendantes en diagonalisant $Z^{1,2,3}$ à l'aide de la transformation complexe de Fortescue F :

$$F = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a^2 & a \\ 3 & a & a^2 \end{bmatrix} \quad F^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} d & 1 & 2 & 3 \\ 1 & a & a^2 \\ i & 1 & a^2 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(F^*)^t \cdot F = U$$

$$F^* = F^{-1}$$

$$Z^{d, i, o} = (F^*)^t \cdot Z^{1, 2, 3} \cdot F$$

α) réseau contenant des machines tournantes

$$Z^{d, i, o} = \begin{vmatrix} Z + a^* Z' + a Z'' & & \\ & Z + a Z' + a^* Z'' & \\ & & Z + Z' + Z'' \end{vmatrix}$$

β) réseau passif

$$Z^{d, i, o} = \begin{vmatrix} Z - Z' & & \\ & Z - Z' & \\ & & Z + 2 Z' \end{vmatrix}$$

L'ordre des calculs des V'_n est le suivant :

$$\begin{aligned} V'_n &= Z_{nn} \cdot I_n \\ &= F \cdot Z_F \cdot F^{-1} \cdot I_n \end{aligned}$$

En appelant

$$I_F = F^{-1} \cdot I_n$$

et

$$V'_F = F^{-1} \cdot V'_n$$

On obtient

$$V'_F = Z_F \cdot I_F$$

Remarque :

Si l'on regarde un réseau triphasé de n noeuds dont on désire diagonaliser la matrice Z_{nn} tel que

$$\begin{matrix} d_1 d_2 \dots d_n & i_1 i_2 \dots i_n & 0_1 0_2 \dots 0_n \\ \begin{matrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{matrix} & \begin{matrix} \boxed{Z_d} & & \\ & \boxed{Z_i} & \\ & & \boxed{Z_o} \end{matrix} \end{matrix}$$

il faut que la matrice de Fortescue soit écrite dans le même ordre :

$$F = \begin{matrix} & \begin{matrix} d_1 & d_2 & \dots & d_n & i_1 & i_2 & \dots & i_n & 0_1 & 0_2 & \dots & 0_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1_1 \\ 1_2 \\ \vdots \\ 1_n \\ 2_1 \\ 2_2 \\ \vdots \\ 2_n \\ 3_1 \\ 3_2 \\ \vdots \\ 3_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & & & & & 1 & & \\ & & \ddots & & & & & & & & \ddots & \\ & & & 1 & & & & & 1 & & & \\ & a^2 & & & a & & & & & 1 & & \\ & & a^2 & & & a & & & & & 1 & \\ & & & \ddots & & & \ddots & & & & & 1 \\ & & & & a^2 & & & a & & & & \\ & a & & & & a^2 & & & 1 & 1 & & \\ & & a & & & & a^2 & & & & & \\ & & & a & & & & a^2 & & & & \\ & & & & a & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$V'_F = Z_F \cdot I_F = \begin{bmatrix} Z_d & & \\ & Z_i & \\ & & Z_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_d \\ I_i \\ I_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_d & I_d \\ Z_i & I_i \\ Z_o & I_o \end{bmatrix}$$

$$V'_n = F \cdot V'_F = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_d & I_d \\ Z_i & I_i \\ Z_o & I_o \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} Z_d I_d + Z_i I_i + Z_o I_o \\ a^2 Z_d I_d + a Z_i I_i + Z_o I_o \\ a Z_d I_d + a^2 Z_i I_i + Z_o I_o \end{bmatrix}$$

2° Maintenant on connaît les tensions V'_n avant le défaut par phase. Pour déterminer les termes correctifs dus au défaut il faut connaître les éléments de la matrice Z_{nn} . Ces éléments nécessaires se calculent facilement à partir des matrices Z_d , Z_i et Z_o générées et gardées en mémoire.

$$Z_{nn} = F \cdot Z_F \cdot F^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_d & & \\ & Z_i & \\ & & Z_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

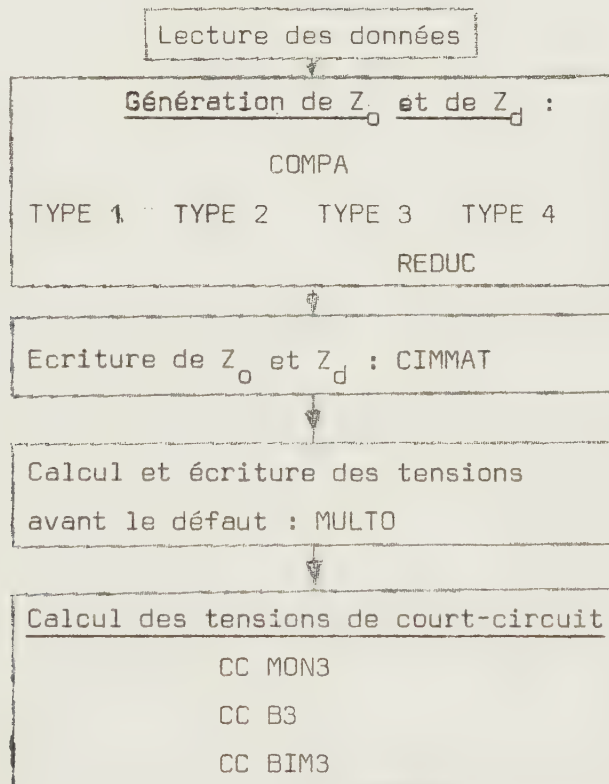
$$Z_{nn} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} Z_d + Z_i + Z_o & a Z_d + a^2 Z_i + Z_o & a^2 Z_d + a Z_i + Z_o \\ a^2 Z_d + a Z_i + Z_o & Z_d + Z_i + Z_o & a Z_d + a^2 Z_i + Z_o \\ a Z_d + a^2 Z_i + Z_o & a^2 Z_d + a Z_i + Z_o & Z_d + Z_i + Z_o \end{bmatrix}$$

Dans la plupart des réseaux on a $Z_d = Z_1$ ce qui donne

$$Z_{nn} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} Z_o + 2Z_d & Z_o - Z_d & Z_o - Z_d \\ Z_o - Z_d & Z_o + 2Z_d & Z_o - Z_d \\ Z_o - Z_d & Z_o - Z_d & Z_o + 2Z_d \end{vmatrix}$$

Donc le vecteur-colonne de Z_{nn} qui correspond au noeud de défaut se calcule facilement à partir des matrices Z_d et Z_o .

Le calcul des tensions de court-circuit peut être décrit par l'organigramme suivant :



Sous-programmes :

COMPA : le type de l'élément ajouté est déterminé

TYPE 1, TYPE 2, TYPE 3, TYPE 4 : Génération de Z_{BUS} selon le type de l'élément ajouté

REDUC : Réduction d'une matrice augmentée

CIMMAT : Ecriture de Z_{BUS} en forme matricielle

MULTO : Multiplication de Z_{BUS} avec le vecteur des sources de courant

CC MON 3 : Court-circuit monophasé

CC B 3 : Court-circuit entre deux noeuds

CC BIM 3 : Court-circuit entre deux noeuds avec mise à la terre.

I - 6. : Résultats.

Réseau équilibré f.e.m. équil. n e		Type de court- circuit *	Temps de calcul / sec.			
			Gén. de Z_{BUS}	Tensions avant le défaut	Tensions de court- circuit	Total
10	16	1, 2, 3				19.2
10	32	1, 2, 3	32.4	0.3	0.7	33.4
14	34	4	51.6	0.6	0.6	52.8
20	32	1, 2, 3				67.2
20	64	1, 2, 3	171.0	1.8	7.2	180.0
30	71	4	294.4	5.8	12.1	312.3

* Type de court-circuit : 1 : cc monophasé
 2 : cc biphasé
 3 : cc biphasé avec mise à la terre
 4 : cc triphasé

Calcul des court-circuits

Chapitre II : Méthode de partition (Diakoptics)

II - 1. : Définition du problème.

La faille des réseaux électriques devenant de plus en plus grande rend inefficace la plupart des méthodes d'analyse classiques. On a souvent à traiter des problèmes qui dépassent la capacité des ordinateurs les plus puissants. Une enquête menée en 1970 aux USA auprès d'une cinquantaine de producteurs d'électricité a montré la nécessité de calculer des réseaux de 2000 à 4000 noeuds. Déjà le stockage de la matrice Z_{BUS} demanderait quelques millions de places en mémoire ($S = n(n+1)/2$) ce qui est impossible.

On peut surmonter cette difficulté en subdivisant le réseau donné en plusieurs sous-réseaux auxquels on applique les méthodes classiques de résolution. En combinant les résultats des différents sous-réseaux on obtient la solution du réseau entier. Cette méthode a été établie à l'origine par Gabriel Kron (35) qui lui a donné le nom de "diakoptics" (diakopton : subdiviser). Elle apporte un gain considérable en temps de calcul et en place mémoire.

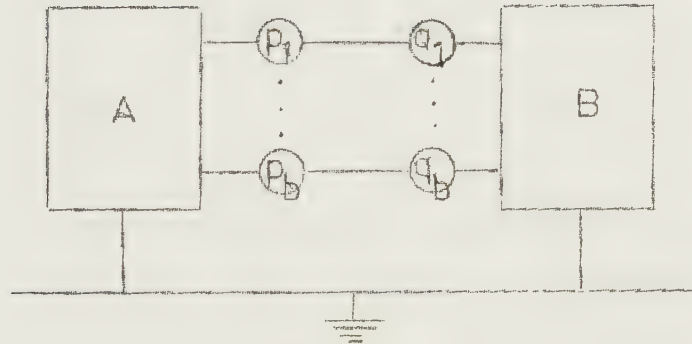
Pour écrire les équations dans la méthode de partition le réseau peut être décrit soit par des matrices d'impédances soit par des matrices d'admittances (2). Nous avons choisi la représentation par la matrice d'impédance nodale Z_{BUS} parce qu'elle met bien en évidence l'essentiel de cette méthode de partition.

Soit un réseau donné dont on connaît la matrice d'impédance nodale Z'_{BUS} telle qu'on l'a définie au chapitre III-2 de la première partie. Si ce réseau est formé de deux parties A et B qui ont le point de référence comme seul point commun, la matrice d'impédance est diagonale par bloc :

$$Z'_{BUS} = \begin{vmatrix} Z'^A_{BUS} & 0 \\ 0 & Z'^B_{BUS} \end{vmatrix} \quad (n \cdot n)$$

Considérons maintenant le même réseau, mais cette fois-ci les parties A et B sont connectées par un ensemble de b éléments :

$$p_1 - q_1, \dots, p_b - q_b :$$



La nouvelle matrice Z_{BUS} peut être déterminée en appliquant les formules de génération pour des éléments du type 4 (Partie I, chap. III-2). Z_{BUS} qui est une matrice $(n+b) \cdot (n+b)$ prend la forme suivante :

$$Z_{BUS} = \begin{vmatrix} Z'_{BUS} & Z_2 \\ Z_2^t & Z_4 \end{vmatrix}$$

Z_4 est une sous-matrice de taille $b \times b$ dont les éléments caractérisent l'interconnexion des sous-réseaux A et B par les b éléments $p_1 - q_1, \dots, p_b - q_b$:

$$Z_4 = Z_i + C^t \cdot Z'_{BUS} \cdot C$$

Z_i est la matrice primitive d'impédance des b éléments ajoutés et C est la matrice d'incidence de ces éléments. Z_2 est une matrice d'ordre $n \cdot b$ qui décrit l'incidence entre l'ensemble des nouveaux éléments et le réseau initial. La i -ème colonne de Z_2 est égal à la différence des colonnes p_i et q_i de Z'_{BUS} .

Le vecteur des tensions nodales du réseau est relié au vecteur des courants injectés par

$$\begin{vmatrix} E \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Z'_{BUS} & Z_2 \\ Z_2^t & Z_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I \\ I_c \end{vmatrix}$$

Les courants I_c dans les b éléments de connexion sont donc donnés par :

$$I_c = - Z_4^{-1} \cdot Z_2^t \cdot t$$

De ce fait on trouve pour E :

$$E = Z'_{BUS} \cdot I + Z_2 \cdot I_c$$

$$E = Z'_{BUS} \cdot I - Z_2 \cdot Z_4^{-1} \cdot Z_2^t \cdot I$$

$$= Z^+_{BUS} \cdot I$$

avec

$$Z^+_{BUS} = Z'_{BUS} - Z_2 \cdot Z_4^{-1} \cdot Z_2^t$$

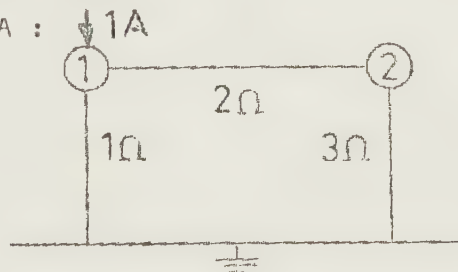
Le réseau est donc entièrement décrit quand on connaît les éléments de la matrice Z'_{BUS} qui est diagonale par blocs et la matrice d'impédance des éléments ajoutés Z_4 .

En termes généraux cela veut dire que le nombre de place en mémoire pour un réseau de n noeuds est ramené de n^2 à $S = n_A^2 + \dots + n_M^2 + b^2$ si le réseau original est subdivisé en M sous-réseaux $A, \dots, M$ en enlevant b éléments (éléments d'interconnexion). Les $n_A, \dots, n_M$ représentent les nombres de noeuds relatifs aux sous-réseaux $A, \dots, M$, avec $n_A + \dots + n_M = n$.

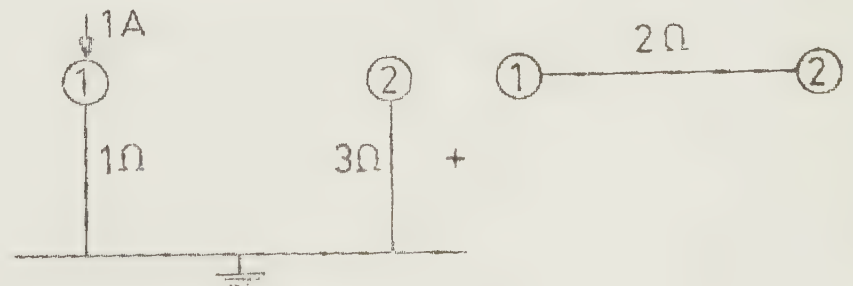
S peut être minimisé en minimisant le nombre d'éléments enlevés b et en choisissant une distribution des noeuds dans les différents sous-réseaux telle que

$$n_A = n_B = \dots = n_M = n/M.$$

Comme exemple considérons le réseau ci-dessous. Il est composé de 3 éléments contenant des résistances respectivement égales à 1Ω , 2Ω et 3Ω et d'un courant injecté au noeud ①, d'intensité égale à 1 A :



En prenant l'élément entre ① et ② comme élément de connexion on obtient le réseau suivant :



On trouve

$$Z'_{BUS} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$Z_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}$$

II - 2. : Méthodes de décomposition.

Les premiers auteurs qui traitaient des problèmes d'analyse des réseaux à l'aide de partitions proposaient de choisir les branches de coupure par inspection du plan du réseau (8). Mais on remarquait que cette méthode manuelle était très lourde surtout lorsque la taille des réseaux était importante.

On cherchait donc une méthode automatique.

Happ (7) pensa à attribuer une fois pour toutes un certain code aux différents noeuds du réseau pour indiquer la zone dont ils faisaient partie. Ceci facilitait le choix des branches de coupure, mais cette méthode dépendante de l'attribution manuelle du code n'était que pseudo-automatique.

Une méthode plus intéressante fut proposée par Undrill et Happ (20).

On a vu que le nombre de places en mémoire est donné par :

$$S = n_A^2 + n_B^2 + \dots + n_M^2 + b^2$$

La valeur de S dépend du nombre M des zones ou sous-réseaux à créer, du nombre n_i des noeuds par zone et du nombre b des éléments à couper.

Dans l'algorithme proposé on choisit d'abord un nombre M de zones qu'on veut créer, on attribue le noeud ① à la zone 1 et au moins un noeud à chacune des autres zones, et on détermine S pour cette distribution initiale. Puis on examine successivement si l'on peut diminuer S en changeant la distribution de chacun des noeuds. Si cela est possible on choisit l'algorithme jusqu'à ce que S ne diminue plus. La distribution ainsi trouvée est considérée comme optimale.

Or comme l'on n'a pas démontré la convexité de la fonction S de la distribution des noeuds, on n'est pas sûr d'avoir trouvé un optimum global indépendant de la distribution initiale choisie.

Il se peut aussi que les différents sous-réseaux trouvés ne soient pas connexes.

Ceci n'est pas un inconvénient puisque cela fait encore diminuer S .

Les résultats suivants ont été trouvés pour les trois réseaux A, B, C avec

A : 21 noeuds , 27 éléments

B : 73 noeuds , 153 éléments

C : 221 noeuds , 350 éléments

Rés.	S	Distr. init.				Elém. à coup.	S	Distr. fin.				Elém. à coup..	S
		1	2	3	4			1	2	3	4		
A	3	7	7	7		10	247	7	8	6		7	198
B	3	35	25	11		28	2899	33	21	19		19	2252
B	3	22	23	28		51	4398	23	25	25		22	2263
B	3	71	1	1		16	5299	41	16	16		24	2769
B	3	71	1	1		12	5187	33	20	20		23	2418
B	4	1	2	1	69	19	5128	27	8	8	30	24	2333
C	4	56	67	69	29	36	14523	50	59	59	53	27	13000
C	3	85	67	69		32	17499	77	68	76		23	16858
C	2	53	168			9	31114	109	112			18	24749
C	2	214	7			10	45945	111	110			20	24821

Un autre algorithme qui est proposé par Sasson (10), (9) est utilisé surtout pour résoudre le problème de la répartition de puissance dans les systèmes contenant un grand nombre de noeuds. La méthode de calcul étant itérative il a été démontré que la convergence de celle-ci dépend beaucoup du choix des éléments à couper. La convergence devient meilleure si l'on coupe des éléments aux plus grandes impédances. Ceci est donc l'idée fondamentale de l'algorithme.

Pour cela on choisit d'abord un premier ensemble d'éléments qui contiennent des impédances faibles et on les assigne à des sous-systèmes. Selon le type des noeuds de chaque élément soit on crée un nouveau sous-système soit on augmente un système déjà existant. Ce procédé est répété un certain nombre de fois pour des valeurs d'impédances croissantes. A la fin ils ne restent que les éléments qui contiennent des impédances élevées. Ceux des éléments dont les deux noeuds se trouvent dans différents sous-réseaux sont alors choisis comme éléments de coupure.

Si certains des sous-réseaux ainsi créés contiennent trop ou pas assez de noeuds il est nécessaire de réarranger les systèmes.

Le tableau suivant montre des décompositions obtenues avec les réseaux standard de IEEE.

Réseau n e		nombre de zones	nombre max. de noeuds par zone	nombre d'élém. à couper
14	20	4	5	10
30	41	5	10	10
57	78	14	10	31
57	78	13	15	30
118	177	18	25	73
118	177	21	15	78
118	177	23	10	75

II - 3. : Algorithme proposé.

La géométrie de tout réseau peut être décrite par une matrice d'incidence A du graphe non-orienté qui est associé à ce système. Les éléments a_{ij} de la matrice A sont définis tels que :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{s'il y a un élément entre les noeuds i et j} \\ 0 & \text{pas d' } \text{-----} \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

S'il est possible de transformer par permutations des lignes et colonnes la matrice d'incidence A en une matrice B diagonale par blocs

$$B = \begin{vmatrix} B_1 & & \\ & & \\ & & B_2 \end{vmatrix}$$

cela signifie qu'il n'y a pas de connexion entre B_1 et B_2 et dans ce cas les deux sous-réseaux associés ne sont pas connectés. Si au contraire les blocs non-diagonaux de la matrice B contiennent des éléments non nuls qui ne peuvent être ramenés dans les blocs diagonaux par aucune permutation des lignes et colonnes de A, cela veut dire que les éléments correspondants doivent être enlevés afin de transformer le réseau donné en un réseau séparable.

A partir de cette idée nous avons établi un algorithme de décomposition en essayant de minimiser le nombre de places en mémoire.

Soit un réseau de n noeuds que nous voulons subdiviser en deux sous-réseaux contenant n_1 et $(n - n_1)$ noeuds respectivement en enlevant un nombre minimum d'éléments. Dans un premier pas nous établissons la matrice d'incidence A qui est subdivisée en 4 blocs :

$$A = \begin{vmatrix} A_1 & C_2 \\ C_1 & A_2 \end{vmatrix}$$

Les blocs A_1 (n_1, n_1), C_2 ($n_1, (n - n_1)$) et A_2 ($(n - n_1), (n - n_1)$) contiennent des éléments non nuls si le réseau donné est connexe tandis que C_1 ($(n - n_1), n_1$) est égale à zéro au début par définition. Nous essayons de minimiser le nombre d'éléments non nuls de C_1 et C_2 qui sont les éléments à enlever en permutant les lignes et colonnes de la matrice A .

Pour cela nous définissons une fonction $f(k, l)$ qui nous indique si une permutation des lignes et colonnes k avec les lignes et colonnes l réduit ou non le nombre d'éléments en C_1 et C_2 :

$$f(k, l) = \sum_{i=1}^{n_1} (a_{il} + a_{li} - a_{ik} - a_{ki}) + \sum_{i=n_1+1}^n (a_{ik} + a_{ki} - a_{il} - a_{li}) - 2a_{kl}$$

Si $f(k, l)$ est égale à un nombre positif a , cela signifie que a éléments quittent C_1 et C_2 , d'autre part si $f(k, l)$ est égale à un nombre négatif b , cela veut dire que b éléments entrent dans C_1 et C_2 , pour $f(k, l) = 0$ il n'y a pas de changement dans le nombre d'éléments en C_1 et C_2 .

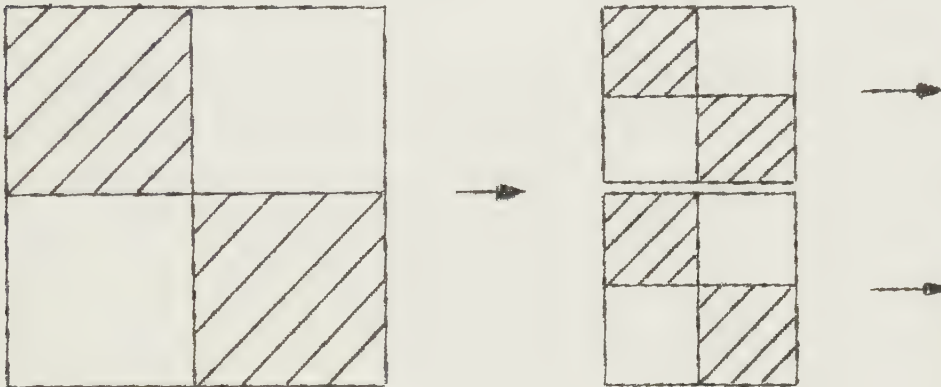
A chaque pas de l'algorithme nous choisissons deux variables k et l telles que $f(k, l) = \max\{f(k, l)\}$.

Si $\max\{f(k, l)\}$ est positive on permute les lignes et colonnes k et l . On continue l'algorithme par un nouveau choix de k et l jusqu'à ce que $f(k, l) \leq 0$ pour toutes valeurs possibles de k et l , ce qui veut dire qu'il n'y a plus d'éléments qui quittent C_1 et C_2 . A la fin de l'algorithme C_1 et C_2 contiennent un nombre minimum d'éléments à enlever qui dépend du choix initial de n et n_1 .

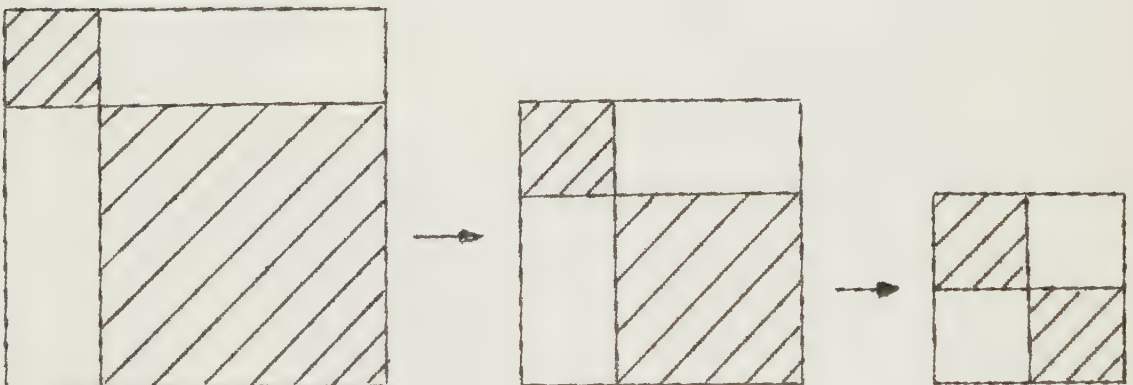
A_1 et A_2 sont composées d'un nombre d'éléments à peu près égal.

En général on veut subdiviser un réseau donné en un ensemble de m sous-réseaux.
Pour cela notre algorithme offre trois méthodes :

- 1) Le système original est divisé en deux jusqu'à ce que nous obtenons une puissance de 2 proche de m :



- 2) On découpe à plusieurs reprises un sous-système de taille convenable jusqu'à ce que le système restant soit lui aussi de taille convenable :



- 3) La matrice d'incidence A est subdivisée en m blocs diagonaux. Puis on effectue l'optimisation sur les $m(m-1)$ blocs du type C en appliquant une fonction $f'(k, l)$:

Puisqu'on veut obtenir 3 sous-réseaux, le nombre maximum de noeuds par zone est égal à 5 et on a $n1 = 5$, donc

$$1 \leq k \leq 5$$

$$6 \leq l \leq 14$$

Avec

$$\begin{aligned} f(k, l) &= \sum_{i=1}^5 (a_{il} + a_{li} - a_{ik} - a_{ki}) + \sum_{i=6}^{14} (a_{ik} + a_{ki} - a_{il} - a_{li}) - 2a_{kl} = \\ &= \left(\sum_{i=1}^5 (a_{il} + a_{li}) - \sum_{i=6}^{14} (a_{il} + a_{li}) \right) + \\ &+ \left(\sum_{i=6}^{14} (a_{ik} + a_{ki}) - \sum_{i=1}^5 (a_{ik} + a_{ki}) \right) - (2a_{kl}) = \\ &= (A) + (B) - (C) \end{aligned}$$

on obtient

k :	1	2	3	4	5	l :	6	7	8	9	10	11	12	13	14
B :	-2	-4	-2	-1	-2	A :	-2	-1	-1	-2	-2	-2	-2	-3	-2

Puisque tous les $f(k, l)$ sont négatifs on ne fait pas de permutations des lignes et colonnes. Le premier sous-réseau est obtenu en enlevant les éléments qui se trouvent en dehors des blocs diagonaux de la matrice A :

4	-	7
4	-	9
5	-	6

Maintenant on considère le réseau restant

$$A' =$$

	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6						1	1	1	
7			1	1					
8									
9					1				1
10						1			
11									
12								1	
13									1
14									

$k : 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad \quad \quad l : 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14$
 $B : 3 \quad -2 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad \quad \quad A : 2 \quad 0 \quad -1 \quad 0$

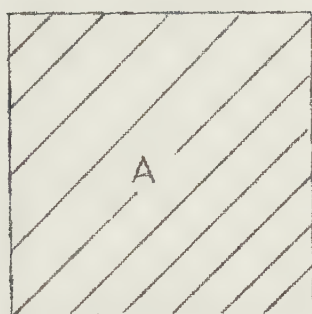
Si l'on choisit $k = 6$ et $l = 11$ on a

$$f(6, 11) = f_{\max} = 3 + 2 - 2 = 3$$

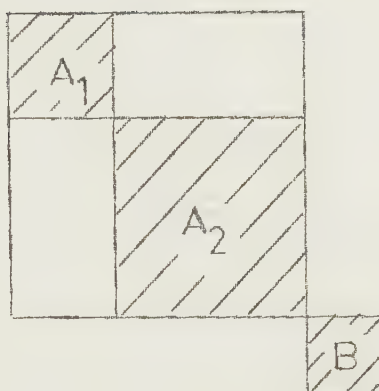
Donc on effectue la permutation entre les lignes et colonnes 6 et 11 :

$$A'' =$$

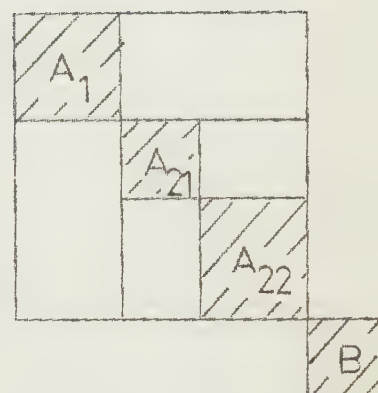
	11	7	8	9	10	6	12	13	14
11									
7			1	1					
8									
9					1				1
10	1								
6	1						1	1	
12								1	
13									1
14									



Nombre de places
occupées par le
réseau donné



Nb. de places occupées
après la décomposition
en 2-sous-réseaux

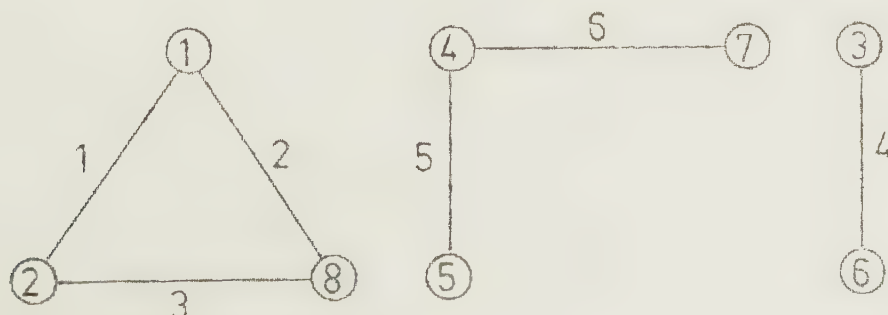


Nb. de places occupées
pour A_2 ayant 2 compo-
santes connexes .

Pour déterminer les composantes connexes d'un réseau on part directement de la définition de la connexité : Soit a un sommet d'un graphe G et C_a l'ensemble des sommets qui lui sont reliés par une chaîne. L'ensemble $a \cup C_a$ détermine une composante connexe de G .

On choisit un premier noeud dans la liste des éléments et on note tous les noeuds qui lui sont reliés. Pour chacun des noeuds ainsi obtenus on répète cet algorithme. Si l'on trouve de nouveaux noeuds on continue, sinon on vérifie que tous les noeuds du réseau ont été listés. Si c'est le cas le réseau est connexe. Si le nombre de noeuds listés est inférieur au nombre total de noeuds cela signifie que l'on a trouvé seulement une première composante connexe du réseau donné et on applique le même procédé aux noeuds restants jusqu'à ce que tous les noeuds aient été listés.

Considérons comme exemple le réseau suivant qui contient 8 noeuds et est formé de 3 composantes connexes :



La liste d'éléments L a la forme suivante :

	1	2
	1	8
	2	8
L =	3	6
	4	5
	4	7

En choisissant le noeud ① comme premier noeud nous attribuons tous les noeuds qui lui sont reliés à la zone 1 en mettant un 1 dans la colonne 3 de L :

1	2	1
1	8	1
2	8	1
3	6	
4	5	
4	7	

Puisque ni 2 ni 8 sont reliés à des nouveaux noeuds et puisque seulement 3 noeuds ont été notés on a trouvé la première composante connexe.

On continue en choisissant le noeud 3 pour trouver la deuxième composante et puis la troisième par le choix du noeud 4 :

1	2	1
1	8	1
2	8	1
3	6	2
4	5	3
4	7	3

II - 5. Résultats

Notre programme a été testé sur l'ordinateur CII 10020 de l'Ecole Centrale de Lyon (48 x 1024 bytes, disque à accès direct)

Les résultats obtenus ont été comparés avec ceux trouvés par la méthode de Undrill et Happ (20) . Comme on le voit dans le tableau I notre méthode est plus économique quant à la place en mémoire et au temps de calcul pour de grands systèmes.

IEEE Syst.	Nb. Zones	1°					2°				
		Distribution finale	Nb.de coup.	S	Temps Sec.		Distribution finale	Nb.de coup.	S	Temps Sec.	
14	5	5 - 2 - 7	4	94	7.8		3 3 3 3 2	11	161	18.0	
	4	5 - 2 - 7	4	94	7.8		4 4 4 2 -	8	116	7.8	
	3	5 2 7 - -	4	94	8.4		5 4 5 - -	5	91	8.4	
	2	1 13 - - -	2	174	7.8		7 7 - - -	3	101	7.8	
30	5	1 1 11 .1 26	8	744	16.8		6 6 6 6 6	13	338	14.4	
	4	1 11 1 27 -	6	768	16.2		8 8 8 6 -	10	328	13.2	
	3	1 1 28 - -	5	811	15.0		10 10 10 - -	8	364	13.8	
	2	1 29 - - -	2	846	15.6		15 15 - - -	6	486	13.8	
57	5	10 12 11 8 16	22	1169	44.4		12 12 12 12 9	22	1141	24.0	
	4	24 15 16 2 -	26	1737	37.8		15 15 14 12 -	15	1015	24.0	
	3	23 18 16 - -	17	1398	40.8		20 20 17 - -	14	1285	22.8	
	2	1 56 - - -	4	3153	27.0		30 27 - - -	10	1900	22.8	

Tableau I

Comparaison d'une méthode existante (1) avec la méthode proposée (2)

D'autre part nous avons utilisé la méthode des partitions pour le calcul des court-circuits triphasés. Les comparaisons avec des méthodes classiques de calcul de court-circuit sont données dans le tableau II . On voit que le temps de calcul est divisé par 2 pour le système de 14 noeuds et par 3 pour celui de 30 noeuds. Les résultats ne diffèrent qu'à partir de la 6-ième décimale.

<u>14 - noeuds</u>		Temps/sec
1. Méthode classique		52.8
2. Méthode proposée		
a) 2 zones avec 7,7 noeuds;	3 éléments coupés	32.4
b) 4 zones avec 4,4,4,2 noeuds;	8 éléments coupés	39.6
c) 3 zones avec 5,5,4 noeuds;	5 éléments coupés	33.6

<u>30 - noeuds</u>		
1. Méthode classique		306.5
2. Méthode proposée		
a) 3 zones avec 10,10,10, noeuds;	8 éléments coupés	94.0
b) 5 zones avec 8,2,6,8,6 noeuds;	10 éléments coupés	91.2

Tableau II

Comparaison entre la méthode classique et la nouvelle méthode diagnostique pour un court-circuit triphasé.

ANNEXE : LA REPARTITION DE PUISSANCE

1. Définition du problème

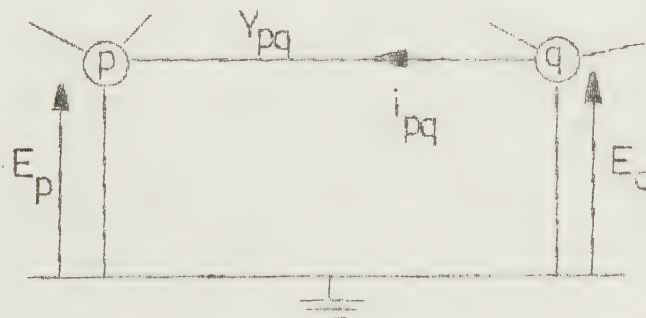
Le problème consiste à déterminer la répartition de charge et les tensions dans un réseau où chaque noeud satisfait à certaines conditions. Il y a trois types de noeud :

1. Noeud producteur (voltage controlled bus) où la puissance active P et le module de la tension $|V|$ sont donnés.
2. Noeud consommateur (load bus) où l'on spécifie la puissance active P et réactive Q .
3. Noeud bilan (slack bus) qui fournit les puissances actives et réactives supplémentaires qu'il faut ajouter pour tenir compte des pertes qui sont inconnues jusqu'à la fin du calcul. A ce noeud on connaît le module de la tension $|V|$ et son angle δ que l'on prend très souvent égal à zéro.

Les inconnues et les données sont liées par des équations qui décrivent la géométrie du réseau et par l'expression de la puissance complexe; ce qui nous amène à résoudre un système nonlinéaire.

La solution peut être trouvée par des méthodes itératives qui linéarisent le système ou par des méthodes d'optimisation.

Pour déduire les équations générales du problème de la répartition de puissance considérons deux noeuds p et q quelconques du réseau donné :



Si I_p désigne le courant qui entre au système au noeud p la puissance active et réactive à ce noeud est donnée par :

$$S_p = P_p - j Q_p = E_p^* I_p$$

D'autre part le courant i_{pq} entre les noeuds p et q devient

$$i_{pq} = (E_p - E_q) Y_{pq}$$

Donc la puissance S_{pq} entre p et q peut être déterminée par

$$S_{pq} = P_{pq} - j Q_{pq} = E_p^* i_{pq} = E_p^* (E_p - E_q) Y_{pq} \quad (1)$$

de même on trouve pour la puissance S_{qp} entre q et p

$$S_{qp} = P_{qp} - j Q_{qp} = E_q^* (E_q - E_p) Y_{pq} \quad (2)$$

Les pertes dans la ligne p - q sont égales à la somme algébrique de (1) et (2).

Méthodes de résolution :

a) Méthode de Gauss

On admet des valeurs initiales pour les tensions à tous les noeuds sauf au noeud bilan où la tension est donnée et reste constante. Maintenant on calcule les courants à tous les noeuds :

$$(3) \quad I_p = \frac{P_p - j Q_p}{E_p^*} \quad \begin{array}{l} p = 1, 2, \dots, n \\ p \neq b = \text{noeud de bilan} \end{array}$$

En introduisant le système d'équations nodales on trouve de nouvelles valeurs pour les tensions

$$(4) \quad E_p = \frac{1}{Y_{pp}} (I_p - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n Y_{pq} E_q) \quad \begin{array}{l} p = 1, 2, \dots, n \\ p \neq b \end{array}$$

avec Y_{ij} comme éléments de la matrice d'admittance nodale ($I_p = Y_{BUS} \cdot E_p$).
Si l'on combine (3) et (4) on obtient comme formule d'itération

$$(5) \quad E_p^{(k+1)} = \frac{1}{Y_{pp}} \left(\frac{P_p - jQ_p}{E_p^{*(k)}} - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n Y_{pq} E_q^{(k)} \right) \quad \begin{matrix} p = 1, 2, \dots, n \\ p \neq b \end{matrix}$$

Cette formule peut directement être appliquée pour les noeuds consommateurs puisque P_p et Q_p sont connues pour ce type de noeuds. Le noeud de bilan ne pose pas de difficulté non plus puisque E_b y est connue et reste constante.

C'est pour les noeuds producteurs (P_p et $|E_p|$ connues) qu'il faut d'abord déterminer Q_p avant de pouvoir utiliser (5).

Pour cela l'équation pour la puissance au noeud p est

$$S_p = P_p - jQ_p = E_p^* I_p = E_p^* \sum_{q=1}^n Y_{pq} E_q$$

En posant $Y_{pq} = g_{pq} - j b_{pq}$

et $E_p = e_p + j f_p$

on trouve pour la puissance Q_p :

$$(6) \quad Q_p = e_p^2 b_{pp} + f_p^2 b_{pp} + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n \left(f_p (e_q g_{pq} + f_q b_{pq}) - e_p (f_q g_{pq} - e_q b_{pq}) \right)$$

Les E_p qui ont été trouvées doivent être ajustées afin qu'elles satisfassent à (6)

D'autre part on a la relation

$$e_p^2 + f_p^2 = |E_p^d|^2$$

où $|E_p^d|$ est la valeur donnée pour un noeud producteur.

En admettant que les valeurs données et calculées aient le même angle de phase on peut ajuster e_p^f et f_p^k telles que

$$e_p^{k+1} = |E_p^d| \cos \delta_p^k$$

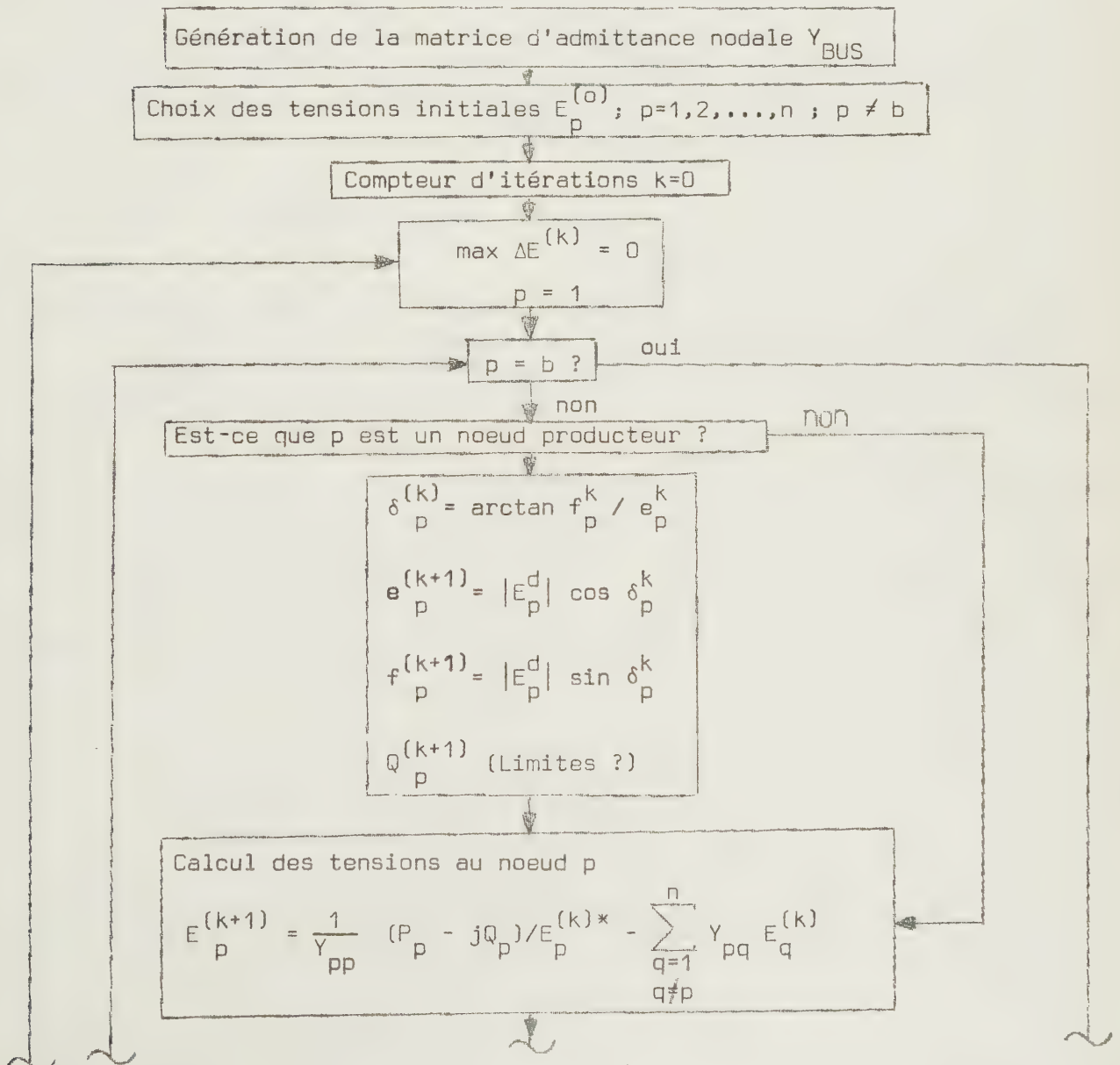
$$f_p^{k+1} = |E_p^d| \sin \delta_p^k$$

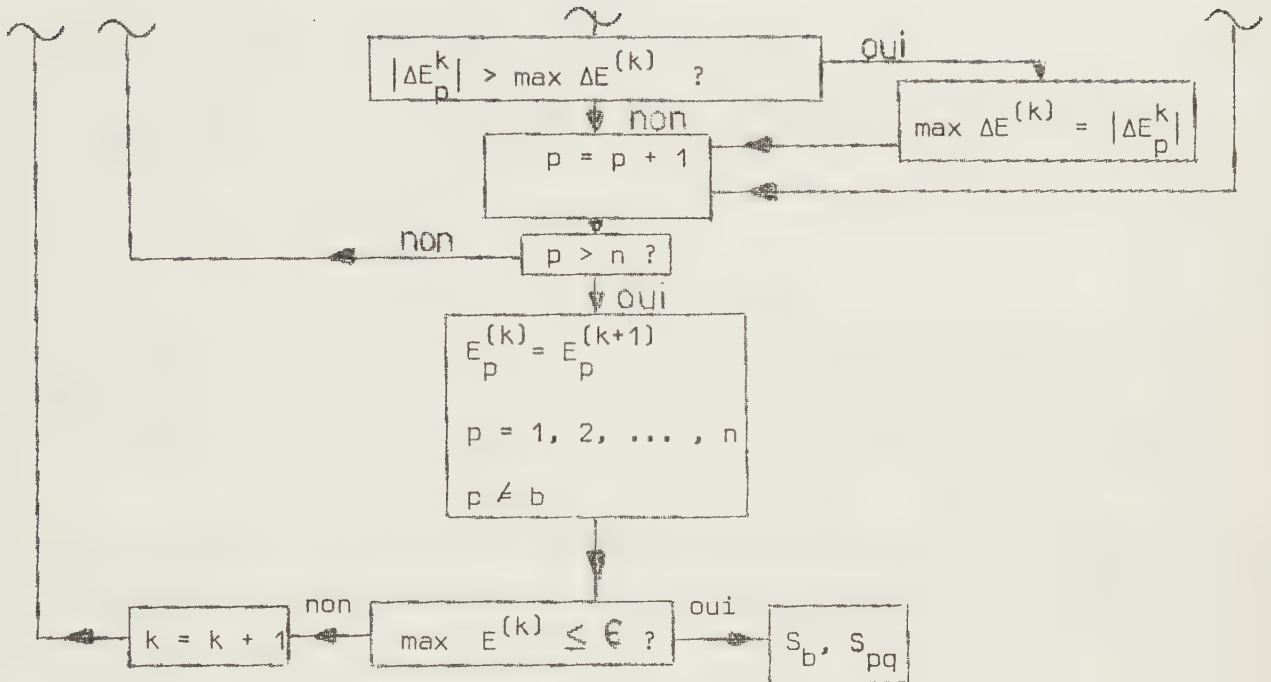
avec

$$\delta_p^k = \arctan \frac{f_p^k}{e_p^k}$$

En mettant e_p^{k+1} et f_p^{k+1} dans (6) on peut déterminer la puissance réactive Q_p qui en pratique ne doit pas dépasser des limites prescrites

$$Q_{\min} \leq Q_p \leq Q_{\max}$$





a) Méthode de Gauss

b) Méthode de Gauss-Seidel

Cette méthode part des mêmes équations que la méthode de Gauss, mais tout E_i^{k+1} calculée remplace directement les E_i^k correspondantes dans le reste des équations :

Calcul des tensions nodales

Gauss :
$$E_p^{k+1} = \frac{1}{Y_{pp}} \left(\frac{P_p - jQ_p}{(E_p^k)^*} - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n Y_{pq} E_q^k \right)$$

$$p = 1, 2, \dots, n$$

$$p \neq b$$

Gauss-Seidel :
$$E_p^{k+1} = \frac{1}{Y_{pp}} \left(\frac{P_p - jQ_p}{(E_p^k)^*} - \sum_{q=1}^{p-1} Y_{pq} E_q^{k+1} - \sum_{q=p+1}^n Y_{pq} E_q^k \right)$$

$$p = 1, 2, \dots, n$$

$$p \neq b$$

c) Méthode de relaxation (Jordan, Southwell)

Principe : Soit le système $A X = b$ à résoudre.

Si l'on part d'un vecteur de valeurs initiales X_0 on peut déterminer un vecteur R_0 de résidus tels que

$$R_0 = A X_0 - b$$

Il faut ensuite trouver des vecteur $X_1, \dots, X_n$ tels que les vecteurs des résidus correspondants $R_1, \dots, R_n$ convergent vers zéro. Suivant la manière d'annuler le vecteur des résidus on parle de relaxation, sur - r., sous - r., et relaxation par bloc.

Pour établir le système linéaire on admet des tensions initiales à tous les noeuds (sauf au noeud bilan). En connaissant la matrice d'admittance nodale, le résidu R_p au noeud p est donné par

$$(1) \quad R_p = Y_{p1} E_1 + Y_{p2} E_2 + \dots + Y_{pp} E_p + \dots + Y_{pn} E_n - I_n$$

L'algorithme est le suivant :

Avec les tensions initiales $E_1^0, \dots, E_b^0, \dots, E_n^0$ on calcule les courants d'après

$$(2) \quad I_p^k = \frac{P_p - jQ_p}{(E_p^k)^*} \quad \begin{array}{l} p = 1, 2, \dots, n \\ p \neq b \end{array}$$

et puis les résidus d'après (1).

La tension au noeud p où $R_p = \max R_p$ est changée telle que

$$(3) \quad E_p^{k+1} = E_p^k + \Delta E_p^k$$

avec

$$(4) \quad \Delta E_p^k = - \frac{R_p^k}{Y_{pp}}$$

On détermine un nouveau courant

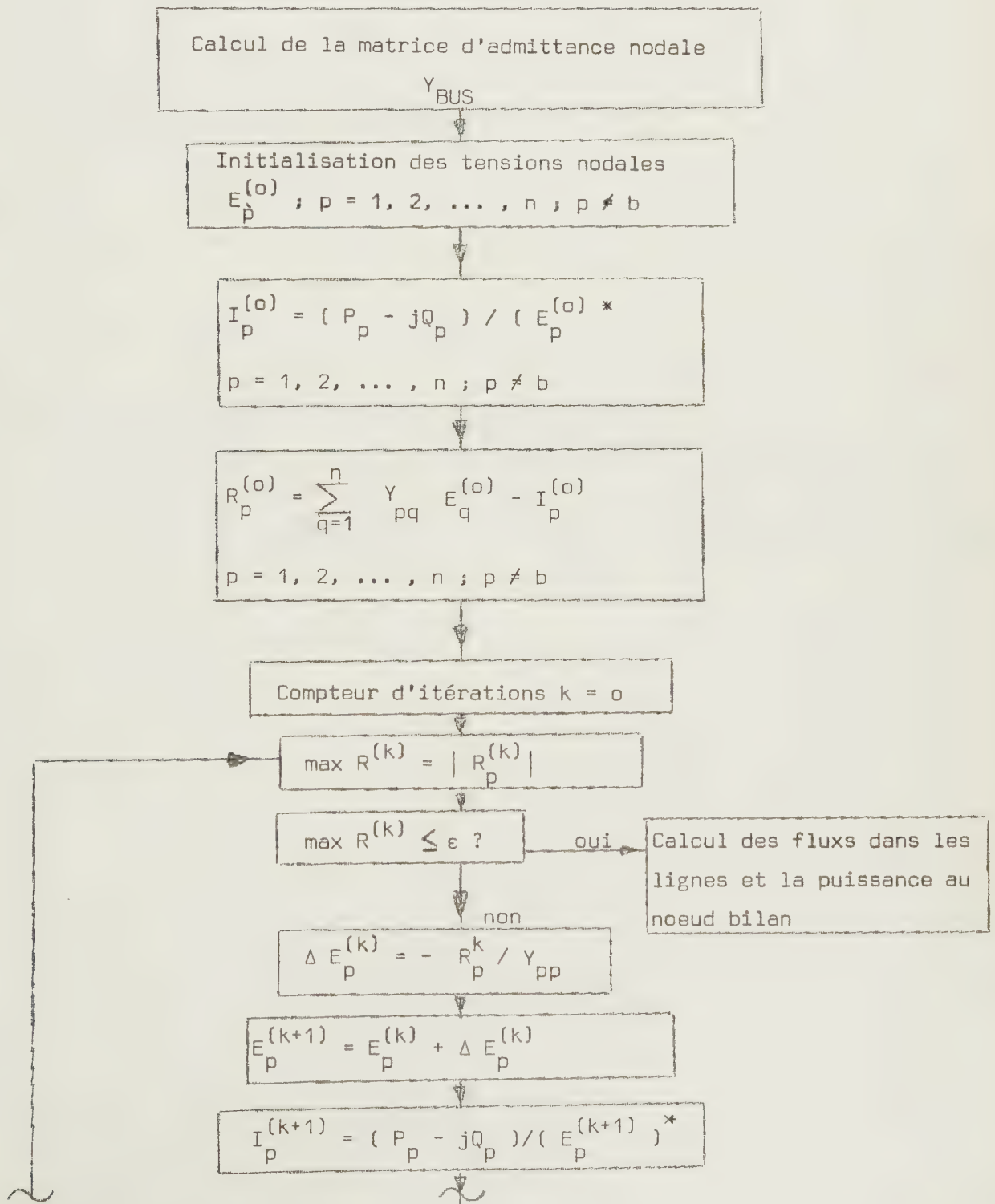
$$I_p^{k+1} = \frac{P_p - jQ_p}{(E_p^{k+1})^*}$$

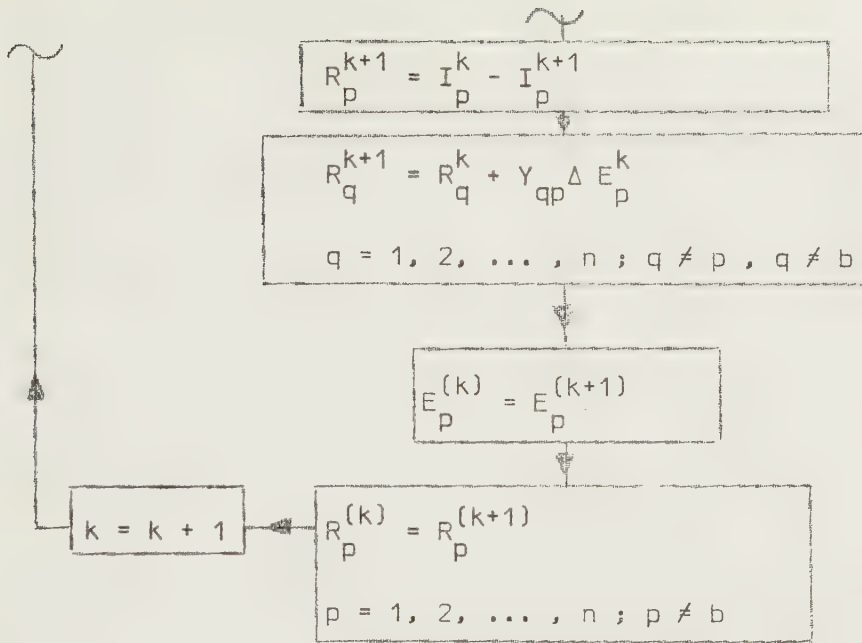
et

$$R_p^{k+1} = I_p^k - I_p^{k+1}$$

On calcule des nouvelles ΔE_p^{k+1} et on continue dans l'algorithme jusqu'à ce que tous les R_p soient inférieurs à un ϵ donné.

La présence de noeuds producteurs nécessite de déterminer des puissances réactives Q_p avant le calcul des courants I_p . Ceci se fait de la même façon comme dans la méthode de Gauss.

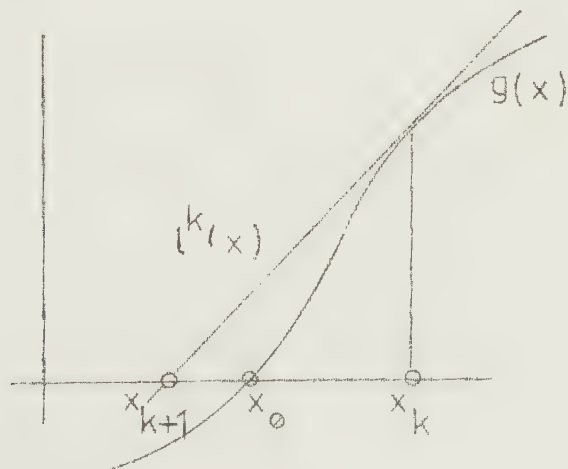




c) Méthode de relaxation

d) Méthode de Newton - Raphson (Van Ness, Griffin)

Principe : Supposons qu'on ait à déterminer la solution de l'équation nonlinéaire $g(x) = 0$. Si la k -ième itération $x(k)$ n'est pas loin de la solution x_0 , $g(x)$ peut être admise comme linéaire dans l'intervalle $x_0 - x(k)$:



En admettant que $g(x)$ soit différentiable, l'approximation linéaire de $g(x)$ au point k est donnée par

$$l^{(k)}(x) = g(x(k)) + \left(\frac{dg}{dx}\right)_k (x - x(k))$$

La solution de $g(x) = 0$ devient $l^{(k)}(x) = 0$ d'où

$$(5) \quad x(k+1) = x(k) - \left(\frac{dg}{dx}\right)_k^{-1} g(x(k))$$

Cette formule peut être généralisée pour un ensemble de n fonctions de n variables. Dans ce cas $\left(\frac{dg}{dx}\right)_k$ représente le Jacobien J de g au point k :

$$J = \frac{dg}{dx} = \begin{vmatrix} \frac{dg1}{dx1} & \frac{dg1}{dx2} & \dots & \frac{dg1}{dxn} \\ \frac{dg2}{dx1} & \dots & & \\ \vdots & & & \\ \frac{dgn}{dx1} & \dots & & \frac{dgn}{dxn} \end{vmatrix}$$

Pour établir le système nonlinéaire, on exprime les puissances actives et réactives qui sont données, par les tensions nodales :

$$(6) \quad S_p^* = P_p - jQ_p = E_p^* I_p = E_p^* \sum_{q=1}^n Y_{pq} E_q$$

(Le cas des noeuds producteurs est considéré séparément)

En mettant

$$E_p = e_p + jf_p$$

$$Y_{pq} = g_{pq} - jb_{pq}$$

on obtient

$$P_p - jQ_p = (e_p - jf_p) \sum_{q=1}^n (g_{pq} - jb_{pq}) (e_q + jf_q)$$

et en séparant les parties réelles et imaginaires

$$(7) \quad P_p = \sum_{q=1}^n (e_p (e_q g_{pq} + f_q b_{pq}) + f_p (f_q g_{pq} - e_q b_{pq}))$$

$$(8) \quad Q_p = \sum_{q=1}^n (f_p (e_q g_{pq} + f_q b_{pq}) - e_p (f_q g_{pq} - e_q b_{pq}))$$

A tous les noeuds sauf au noeud bilan on connaît P_p et Q_p et on cherche e_p et f_p . Au noeud bilan c'est la puissance active et réactive qui sont inconnues tandis que la tension est donnée et reste constante.

On a donc 2 (n-1) équations à résoudre pour un réseau de n noeuds.

En admettant que le noeud de bilan porte le numéro n on peut écrire le système suivant qui représente les changements des puissances causées par les changements des tensions nodales :

$$\begin{array}{c|cc|cc|c} \Delta P_1 & \frac{\partial P_1}{\partial e_1} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial e_{n-1}} & \frac{\partial P_1}{\partial f_1} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial f_{n-1}} & \Delta e_1 \\ \cdot & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & \dots & & & \dots & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & \cdot \\ \Delta P_{n-1} & \frac{\partial P_{n-1}}{\partial e_1} & \dots & \frac{\partial P_{n-1}}{\partial e_{n-1}} & \frac{\partial P_{n-1}}{\partial f_1} & \dots & \frac{\partial P_{n-1}}{\partial f_{n-1}} & \Delta e_{n-1} \\ \hline \Delta Q_1 & \frac{\partial Q_1}{\partial e_1} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial e_{n-1}} & \frac{\partial Q_1}{\partial f_1} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial f_{n-1}} & \Delta f_1 \\ \cdot & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & \dots & & & \dots & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & \cdot \\ \Delta Q_{n-1} & \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial e_1} & \dots & \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial e_{n-1}} & \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial f_1} & \dots & \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial f_{n-1}} & \Delta f_{n-1} \end{array}$$

Ou en forme plus générale

$$\begin{vmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Delta e \\ \Delta f \end{vmatrix}$$

Les éléments de la matrice J peuvent être déterminés à partir des équations (7) et (8) . La puissance active au noeud p était donnée par :

$$P_p = e_p (e_p g_{pp} + f_p b_{pp}) + f_p (f_p g_{pp} - e_p b_{pp}) + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n (e_p (e_q g_{pq} + f_q b_{pq}) + f_p (f_q g_{pq} - e_q b_{pq}))$$

$$p = 1, 2, \dots, n-1$$

Pour les éléments non-diagonaux de J_1 on trouve

$$\frac{\partial P_p}{\partial e_q} = e_p g_{pq} - f_p b_{pq} \quad q \neq p$$

et pour les éléments diagonaux

$$(9) \quad \frac{\partial P_p}{\partial e_p} = 2e_p g_{pp} + f_p b_{pp} - f_p b_{pp} + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n (e_q g_{pq} + f_q b_{pq})$$

(9) peut être écrit d'une manière plus simple en introduisant l'expression pour le courant au noeud p :

$$I_p = c_p + j d_p = (g_{pp} - j b_{pp}) (e_p + j f_p) + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n (g_{pq} - j b_{pq}) (e_q + j f_q)$$

Ceci donne

$$c_p = e_p g_{pp} + f_p b_{pp} + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n (e_q g_{pq} + f_q b_{pq})$$

$$p = 1, 2, \dots, n-1$$

$$d_p = f_p g_{pp} - e_p b_{pp} + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n (f_q g_{pq} - e_q b_{pq})$$

$$p = 1, 2, \dots, n-1$$

Donc on obtient pour les éléments diagonaux de J_1 :

$$\frac{\partial P}{\partial e_p} = e_p g_{pp} - f_p b_{pp} + c_p$$

Les autres éléments du Jacobien peuvent être déterminés de la même manière.

On trouve les résultats suivants :

$J_1 :$	$\frac{\partial P}{\partial e_q} = e_p g_{pq} - f_p b_{pq} \quad q \neq p$ $\frac{\partial P}{\partial e_p} = e_p g_{pp} - f_p b_{pp} + c_p$
$J_2 :$	$\frac{\partial P}{\partial f_q} = e_p b_{pq} + f_p g_{pq} \quad q \neq p$ $\frac{\partial P}{\partial f_p} = e_p b_{pp} + f_p g_{pp} + d_p$
$J_3 :$	$\frac{\partial Q}{\partial e_q} = e_p b_{pq} + f_p g_{pq} \quad q \neq p$ $\frac{\partial Q}{\partial e_p} = e_p b_{pp} + f_p g_{pp} - d_p$

$$J_4 : \begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial f_q} = -e_p g_{pq} + f_p b_{pq} \\ \frac{\partial Q}{\partial f_p} = -e_p g_{pp} + f_p b_{pp} + c_p \end{array} \quad q \neq p$$

Dans la méthode de Newton - Raphson on peut également utiliser des coordonnées polaires pour décrire le système nonlinéair :

$$E_p = |E_p| e^{j\delta_p}$$

$$y_{pq} = |y_{pq}| e^{-j\theta_{pq}}$$

$$S_p^* = P_p - jQ_p = \sum_{q=1}^n |E_p E_q y_{pq}| e^{-j(\theta_{pq} + \delta_p - \delta_q)}$$

$$P_p = \sum_{q=1}^n |E_p E_q y_{pq}| \cos(\theta_{pq} + \delta_p - \delta_q)$$

$$p = 1, 2, \dots, n-1$$

$$Q_p = \sum_{q=1}^n |E_p E_q y_{pq}| \sin(\theta_{pq} + \delta_p - \delta_q)$$

$$p = 1, 2, \dots, n-1$$

Puis

$$\begin{vmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Delta \delta \\ \Delta |E| \end{vmatrix}$$

avec

$$J_1 : \quad \frac{\partial P_p}{\partial \delta_q} = |E_p E_q y_{pq}| \sin (\theta_{pq} + \delta_p - \delta_q) \quad q \neq p$$

$$\frac{\partial P_p}{\partial \delta_p} = - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n |E_p E_q y_{pq}| \sin (\theta_{pq} + \delta_p - \delta_q)$$

$$J_2 : \quad \frac{\partial P_p}{\partial |E_q|} = |E_p y_{pq}| \cos (\theta_{pq} + \delta_p - \delta_q) \quad q \neq p$$

$$\frac{\partial P_p}{\partial |E_p|} = 2 |E_p y_{pp}| \cos \theta_{pp} + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n |E_q y_{pq}| \cos (\theta_{pq} + \delta_p - \delta_q)$$

$$J_3 : \quad \frac{\partial Q_p}{\partial \delta_q} = - |E_p E_q y_{pq}| \cos (\theta_{pq} + \delta_p - \delta_q) \quad q \neq p$$

$$\frac{\partial Q_p}{\partial \delta_p} = \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n |E_p E_q y_{pq}| \cos (\theta_{pq} + \delta_p - \delta_q)$$

$$J_4 : \quad \frac{\partial Q_p}{\partial |E_q|} = |E_p y_{pq}| \sin (\theta_{pq} + \delta_p - \delta_q) \quad q \neq p$$

$$\frac{\partial Q_p}{\partial |E_p|} = 2 |E_p y_{pp}| \sin \theta_{pp} + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n |E_q y_{pq}| \sin (\theta_{pq} + \delta_p - \delta_q)$$

Jusqu'ici on avait regardé la méthode de Newton - Raphson pour un réseau ne contenant que des noeuds consommateurs.

Introduisons des noeuds producteurs maintenant. On y connaît P et $|E|$:

$$P_p = \sum_{q=1}^n (e_p (e_q g_{pq} + f_q b_{pq}) + f_p (f_q g_{pq} - e_q b_{pq}))$$

$$|E_p|^2 = e_p^2 + f_p^2$$

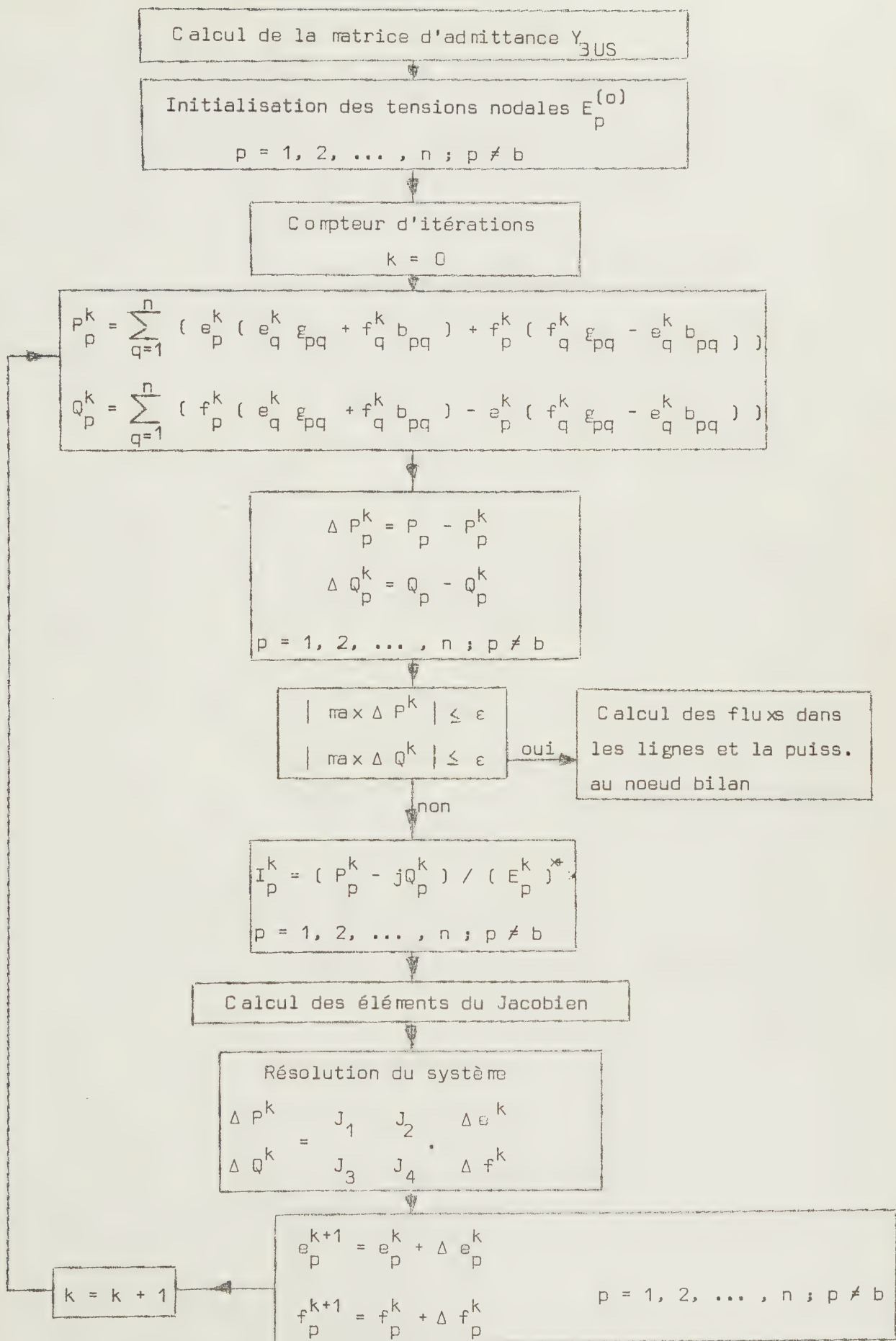
On peut écrire

$$\begin{array}{c|c|c|c} \Delta P & J_1 & J_2 & \Delta e \\ \hline \Delta Q & J_3 & J_4 & \Delta f \\ \hline \Delta |E|^2 & J_5 & J_6 & \end{array}$$

Les J_1 , J_2 , J_3 , J_4 sont calculés comme avant.

Pour J_5 et J_6 on trouve

$$\begin{array}{ll} J_5 : & \frac{\partial |E_p|^2}{\partial e_q} = 0 \\ & \frac{\partial |E_p|^2}{\partial e_p} = 2 e_{ip} \\ J_6 : & \frac{\partial |E_p|^2}{\partial f_q} = 0 \\ & \frac{\partial |E_p|^2}{\partial f_p} = 2 f_p \end{array}$$



L'inconvénient de la méthode de Newton - Raphson vient du fait que le Jacobien doit être inversé à chaque itération. C'est pour cela qu'on utilise souvent des approximations du Jacobien qui sont plus faciles à inverser.

Puisqu'en général un petit changement de $|E|$ ne change pas beaucoup P on peut admettre que

$$J_2 \approx 0$$

De même Q n'est pas beaucoup influencée par un petit changement de δ ,

donc

$$J_3 \approx 0$$

et on trouve comme système approché

$$\Delta P = J_1 \Delta \delta$$

$$\Delta Q = J_4 \Delta |E|$$

Cette méthode a été proposée par Carpentier (1963)

Une autre approximation consiste à négliger les éléments non-diagonaux de J_1, J_2, J_3, J_4 (Ward and Hale ; 1956) :

On obtient

$$\Delta P_p = \frac{\partial P_p}{\partial e_p} \Delta e_p + \frac{\partial P_p}{\partial f_p} \Delta f_p =$$

$$= \Delta e_p (e_p g_{pp} - f_p b_{pp} + c_p) + \Delta f_p (e_p b_{pp} + f_p g_{pp} + d_p)$$

$$\Delta Q_p = \frac{\partial Q_p}{\partial e_p} \Delta e_p + \frac{\partial Q_p}{\partial f_p} \Delta f_p =$$

$$= \Delta e_p (e_p b_{pp} + f_p g_{pp} - d_p) + \Delta f_p (-e_p g_{pp} + f_p b_{pp} + c_p)$$

$$p = 1, 2, \dots, n-1$$

Ces équations peuvent être résolues par Gauss - Seidel .

e) Méthodes d'optimisation

Principes : Le problème général d'optimisation est de trouver le minimum d'une fonction $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ avec les contraintes

$$\begin{aligned} g_i(x) &\geq 0 & i = 1, \dots, m \\ h_j(x) &= 0 & j = 1, \dots, p \quad p < n \end{aligned}$$

Si $m = p = 0$, on parle de minimisation sans contraintes. On en trouve la solution par la méthode de Newton ou de Fletcher - Powell [37], la méthode classique de résolution

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0$$

devenant souvent impraticable.

Pour $m = 0$ et $p > 0$ on peut utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange où il faut résoudre

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial h_j(x)}{\partial x} = 0$$

et
$$h_j(x) = 0$$

Ceci peut être difficile et ne donne pas toujours des solutions uniques.

Dans les cas où $m > 0$ et $p > 0$ le minimum est caractérisé par les conditions de Kuhn - Tucker .

On y transforme le problème original d'une fonction avec contraintes dans une autre fonction

$$(1) \quad K(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{j=1}^p \lambda_j h_j(x) - \sum_{i=1}^m \mu_i g_i(x)$$

avec les équations d'exclusion

$$(2) \quad \mu_i g_i(x) = 0, \quad \mu_i > 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$f(x)$ a donc été transformé en une fonction sans contraintes de x, λ, μ .
Le minimum est trouvé par :

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} + \sum_{j=1}^p \lambda_j \frac{\partial h_j(x)}{\partial x} - \sum_{i=1}^m \mu_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x} = 0$$

et $\frac{\partial K}{\partial \lambda_j} = h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p$

$\frac{\partial K}{\partial \mu_i} = g_i(x) = 0, \quad \mu_i > 0, \quad i = 1, \dots, m$

En termes d'optimisation le problème de repartition de charge peut être regardé comme problème de minimisation d'une fonction sans contraintes :

Si on cherche la solution d'un système d'équations non-linéaires

$$f_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

le minimum de la fonction suivante coïncide avec la solution de

$$F(x) = \sum_{i=1}^n f_i^2(x)$$

Ce minimum est égal à zéro.

En se basant sur la matrice d'admittance nodale on peut écrire les équations suivantes :

1° Noeud producteur :

$$P_j = \text{Re} (E_j (Y_{j1} E_1 + \dots + Y_{jn} E_n))$$

$$(e_j^2 + f_j^2)^{1/2} = |E_j|$$

2° Noeud consommateur :

$$E_j (Y_{j1} E_1 + \dots + Y_{jn} E_n) = P_j - jQ_j$$

3° Noeud bilan :

$$f_j = 0$$

$$e_j = |E_j|$$

Donc la fonction à minimiser devient

$$\begin{aligned} F(e, f) = & \sum_j^{P,C} (\operatorname{Re} (E_j (Y_{j1} E_1 + \dots + Y_{jn} E_n)) - P_j)^2 \\ & + \sum_j^Q (\operatorname{Im} (E_j (Y_{j1} E_1 + \dots + Y_{jn} E_n)) - Q_j)^2 \\ & + \sum_j^P ((e_j^2 + f_j^2)^{1/2} - |E_j|)^2 \end{aligned}$$

Si $F(e, f)$ approche vers zéro on a trouvé la solution.

Souvent on cherche une solution du problème de la repartition de charge qui minimise les pertes dans les lignes par des variations de $|E|$ et de Q . On avait vu que les pertes sont données comme somme des puissances actives qui entrent en tous points du réseau :

$$f = \sum_{j=1}^M (\operatorname{Re} (E_j (Y_{j1} E_1 + \dots + Y_{jn} E_n)))$$

A chaque noeud on a six équations comme contraintes qui spécifient des limites supérieures et inférieures de la tension et de la puissance active et reactive :

$$|V|_{\min} < |V| < |V|_{\max}$$

$$P_{\min} < P < P_{\max}$$

$$Q_{\min} < Q < Q_{\max}$$

Pour distinguer les 3 différents types de noeuds on donne des limites étroites de P et Q et des limites larges de $|V|$ pour les noeuds consommateurs, des limites étroites de P et $|V|$ et des limites larges de Q pour les noeuds producteurs, et des limites étroites de $|V|$ et larges de P et Q pour le noeud de bilan.

CONCLUSION

Nous venons de présenter au cours de ce travail un ensemble de méthodes permettant le calcul automatique des réseaux électriques. Le champ d'application de ce domaine est extrêmement vaste et s'agrandit tous les jours de méthodes et d'algorithmes nouveaux; ce qui rend très difficile tout travail de synthèse sur le sujet.

Néanmoins nous avons essayé de présenter les principales méthodes utilisées couramment de nos jours, contribuant ainsi à augmenter la documentation en langue française assez pauvre sur ce sujet.

Par ailleurs nous avons, pour chacune des méthodes décrites, proposé soit un algorithme soit une méthode permettant de diminuer les temps de calculs ou l'encombrement mémoire. En particulier la minimisation de l'encombrement mémoire, grâce à l'utilisation de la méthode des partitions, permet d'étudier des grands réseaux sur des ordinateurs de taille moyenne.

Nous avons bien entendu pour chacune des méthodes étudiées écrit des programmes en FORTRAN ou ALGOL qui, implantés sur les ordinateurs de l'Ecole Centrale de Lyon et de l'Institut de Mathématiques Appliquées de Grenoble, nous ont permis de vérifier l'exactitude de nos calculs. L'ensemble de ces programmes est décrit dans un manuel d'utilisation qui facilite leur emploi.

Nous espérons, par ce travail, avoir apporté une modeste contribution à l'avancement des travaux effectués dans ce domaine, et nous souhaitons permettre ainsi l'utilisation pédagogique des programmes rédigés en vue de l'exploitation industrielle mais aussi universitaire.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G.W. Stagg, A.H. El-Abiad, "Computer methods in power system analysis",
Mc Graw-Hill, Inc., 1970.
- [2] A. Brameller, M.N. John, M.R. Scott, "Practical diakoptics for electrical
networks", Chapman + Hall Ltd, 1969.
- [3] H.H. Happ, C.C. Young, "Tearing algorithms for large-scale network programs",
Paper presented at the IEEE PICA Conference, Boston, 1971.
- [4] EDF, Service des Etudes des réseaux, "Résolution des problèmes de répartition
des puissances sur un réseau maillé".
- [5] D. Feingold, D. Spohn, "Application des calculateurs arithmétiques aux études
de réseaux maillés", RGE, tome 76, n° 4, pp. 681-696, 1967.
- [6] Y.P. Dusonchet, S.N. Talukdar, H.E. Sinnot, A.H. El-Abiad, "Load flows using
a combination of point Jacobi and Newton's methods", Paper Nr. 70 TP 686 -
PWR, presented at the IEEE Summer Power Meeting, Los Angeles, 1970.
- [7] R.G. Andretich, D.H. Hansen, H.E. Brown, H.H. Happ, "Piecewise Load flow
solutions of very large size networks", Paper Nr. 70 TP-687 PWR, presented
at the IEEE Summer Power Meeting, Los Angelès, 1970.
- [8] R.G. Andretich, H.E. Brown, H.H. Happ, C.E. Person, "The piecewise solution
of the impedance matrix load flow", IEEE Trans. Pas-87, pp. 1877-1882, 1968.
- [9] F. Aboytes, A.M. Sasson, "A power systems decomposition algorithm", Paper
presented at the IEEE PICA Conference, Boston 1971.
- [10] A.M. Sasson, "Decomposition techniques applied to the non linear programming
load-flow method", IEEE Trans. Pas-89, pp. 78-82, 1970.
- [11] H.H. Happ, "Diakoptics and piecewise methods", IEEE Trans. Pas-89, pp. 1373-
1382, 1970.

- [12] A.M. Sasson, H.E. Brown, "Deductions and clarifications on the diakoptics approach", Paper presented at the IEEE PICA Conference, Boston, 1971.
- [13] M.A. Laughton, "Analysis of unbalanced polyphase networks by the method of phase co-ordinates", Proc. IEEE, vol. 116, n° 5, 1969.
- [14] G.J. Berg, A.K. Kar, "Model representation of power system loads".
- [15] J.C. Dodu, A. Merlin, "Méthode de résolution du dispatching économique dans l'approximation du courant continu (Modèle Maya)", EDF, Bulletin de la direction des études et recherches, Série B, n° 3, pp. 5-24, 1970.
- [16] F.J. Hubert, D.R. Hayes, "A rapid digital computer solution for power system network load-flow", Paper 70 TP 685-PWR, presented at the IEEE Summer Power Meeting, Los Angeles 1970.
- [17] R.W. Hawkins, "Decomposition techniques in power-system-network load-flow analysis using the nodal impedance matrix", Proc. IEE, Vol. 116, n°4, 1969.
- [18] L.L. Freris, A.M. Sasson, "Investigation of the load-flow problem", Proc. IEE, vol. 115, n° 10, 1968.
- [19] R.B. Shipley, D. Coleman, W.L. Nason, "Short-circuit comparison study", Proc. IEE, n° 2, 1962.
- [20] J.M. Undrill, H.H. Happ, "Automatic sectionalization of power system networks for network solutions", Paper n° 70 TP 50 PWR, presented at the IEEE Winter Power Meeting, New York, 1970.
- [21] P. Le Corbeiller, "Analyse matricielle des réseaux électriques", Dunod, 1954.
- [22] G.J. Minty, "A simple algorithm for listing all the trees of a graph", IEEE Trans. on circuit theory, nr. 3, 1965.

- (23) W.S. Percival, "Solution of passive electrical networks by means of mathematical trees, Proc. IEE, vol. 100, pp. 143-150, 1953.
- (24) W. Feussner, "Annalen der Physik", vol. 9, pp. 1304-1329, 1902, et ibid., vol. 15, pp. 385-394, 1904.
- (25) H.E. Brown, J.O. Storry, "Improved method of incorporating mutual couplings in single phase short-circuit calculations", PICA Conference Proceedings, May 1969.
- (26) W.A. Prebble, "Digital calculation of sequence networks including mutual impedances", Proc. IEE, vol. 112, n° 4, 1965.
- (27) H.A. Daniels, Mo-Shing Chen, "Compensation of mutual coupling in the formation of the bus impedance matrix", Paper 70 TP 507 PWR, presented at the IEEE Summer Power Meeting, Los Angeles, 1970.
- (28) H. Weh, "Elektrische Netzwerke und Maschinen in Matrizen-darstellung", Bibliographisches Institut, 1968.
- (29) W. Gröbner, "Matrizenrechnung", Bibliographisches Institut, 1965.
- (30) A.H. El-Abiad, R. Guidone, G.W. Stagg, "Calculation of short circuits using a high-speed digital computer", Proc. IEE, n° 12, pp. 702-707, 1961.
- (31) N. Dharma Rao, H.N. Ramachandra Rao, "Study of symmetrical and related components through the theory of linear vector spaces", Proc. IEE, vol. 113, n° 6, 1966.
- (32) Wai-Kai Chen, "Generation of trees and cotrees of a graph by decomposition", Proc. IEE, vol. 116, n° 10, 1969.
- (33) G.E. Taylor, G.K. Carter, E.H. Mac Donald, "New digital computer short-circuit program for relay studies", Proc. IEE, n° 2, pp. 1257-1264, 1961.

- (34) L.M. Maxwell, J.M. Cline, "Topological network analysis by algebraic methods",
Proc. IEE, vol. 113, n° 8, 1966.
- (35) G. Kron, "Tensorial analysis of integrated transmission systems", Proc. IEE,
vol. 70, pp. 1239-1248, 1951.
- (36) R. PELlet, "Initiation à la théorie des graphes - Vocabulaire descriptif",
Entreprise Moderne d'Edition, Paris, 1966.
- (37) R. Fletcher, M.J.D. Powell, 'A rapidly convergent descent method for minimization
Communications of the ACM, vol. 8, n° 3, 1965.
- (38) F.S. Rothe, "An introduction to power system analysis", Chapman + Hall, London,
1953.

Vu.

Les membres de Jury :

Vu et approuvé.

Le Directeur de l'U.E.R. de

Vu et accordé le permis d'imprimer.

Lyon, le 1972

Le Président de l'Université

Claude Bernard,

J. BOIDIN.

